# Blind Search

## Ferienakademie im Sarntal — Kurs 1
## Moderne Suchmethoden der Informatik: Trends und Potenzial

Sophia Koch

Fakultät für Mathematik
TU München

23. September 2014

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG

Technische Universität München

Universität Stuttgart

# Blind Search - das Spiel

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Gliederung

# Der diskrete Prozess

- $A := \{0, \dots, n\},\ n \in \mathbb{N},\ x \in A$
- $D := \{1, \dots, n\},\ \mu,\ d \in D$
- $X := (X_0, X_1, \dots)$
  - $X_0 \in A \setminus \{0\}$
  - $X_t = \begin{cases} X_{t-1} - d & \text{falls } X_{t-1} \geq d \\ X_{t-1} & \text{falls } X_{t-1} < d \end{cases},\ t \in \mathbb{N}$
- $T_x := \min\{t \mid X_t = 0\}$

$\Rightarrow E_\mu(T_x)$

# Minimierungsproblem auf unbekannter Funktion

- Geg.: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, Beispielpunkte
  Ges.: Minimum
- skalierungsunabhängiges $\mu$:
  - $p := \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$
  - $h(t) := \begin{cases} \frac{1}{pt} & \text{falls } \epsilon \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $d := \exp(-pu),\ u \in [0,1]$
- f unimodal
- $\tau := \text{dist}(x, x^*)$ mit $\tau \geq 2\epsilon$
  - $\frac{1}{2}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{dt}{pt} = \frac{\ln 2}{2p}$
  - $\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot \frac{2p}{\ln 2} = O\left(\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^2\right)$

# Einführung von Konventionen

- $\langle a, b\rangle := \{a, \ldots, b\},\ a, b \in \mathbb{Z}$
- $\mu$ Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\langle 1, n\rangle$
- $X = (X_0, X_1, \ldots)$ über $A = \langle 0, n\rangle$
  - $X_0$ gleichmäßig verteilt in $A \setminus \{0\} = \langle 1, n\rangle$
  - $Pr\left(X_t = x' | X_{t-1} = x\right) = \begin{cases} \mu\left(x - x'\right) & \text{falls } x' < x \\ 1 - \sum_{d=1}^{x} \mu\left(d\right) & \text{falls } x' = x \\ 0 & \text{falls } x' > x \end{cases}$
- $T_x = \min\{t | X_t = 0\}$

$\Rightarrow E_\mu\left(T_x\right)$

# Erste Folgerungen

Bemerkung:

$\mu(1) = 0 \Rightarrow E_\mu(T_x) = \infty$

Voraussetzung:

$\forall\mu$ Wahrscheinlichkeitsverteilung: $\mu(1) > 0$

$$F(x) := \mu(\langle 1, x\rangle) = \sum_{d=1}^{x} \mu(d), \; x \in A \setminus \{0\}$$

Proposition:

$$E_\mu(T_x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \le x_1 < \ldots < x_l \le n} \frac{\mu(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot \mu(x_l - x_{l-1})}{F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_l)}$$

## Beweis:

- *Bem.1* $\Rightarrow \forall x \in A \setminus \{0\}: \; F(x) > 0$
- $T_x = 1 + (1 - F(x)) \cdot T_x + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d}$,

  $T_0 = 0$

$\Rightarrow \quad T_x = \frac{1}{F(x)} \cdot \left(1 + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d}\right), \; 1 \leq x \leq n$

## Beweis:

- *Bem.1* $\Rightarrow \forall x \in A \setminus \{0\} : \; F(x) > 0$
- $T_x = 1 + (1 - F(x)) \cdot T_x + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d},$

  $T_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad T_x = \frac{1}{F(x)} \cdot \left(1 + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d}\right), \; 1 \leq x \leq n$$

- $T_1 = \frac{1}{\mu(1)} = \frac{1}{F(1)},$

  $T_2 = \frac{1}{F(2)} + \frac{\mu(1)}{F(1) \cdot F(2)},$

  $T_3 = \frac{1}{F(3)} + \frac{\mu(2)}{F(1) \cdot F(3)} + \frac{\mu(1)}{F(2) \cdot F(3)} + \frac{(\mu(1))^2}{F(1) \cdot F(2) \cdot F(3)}$
- $T_x = \sum_{1 \leq x_1 < \ldots < x_l = x} \frac{\mu(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot \mu(x_l - x_{l-1})}{F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_l)}$

## Beweis:

- *Bem.1* $\Rightarrow \forall x \in A \setminus \{0\}: \; F(x) > 0$
- $T_x = 1 + (1 - F(x)) \cdot T_x + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d},$

  $T_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad T_x = \frac{1}{F(x)} \cdot \left(1 + \sum_{d=1}^{x} \mu(d) \cdot T_{x-d}\right), \; 1 \le x \le n$$

- $T_1 = \frac{1}{\mu(1)} = \frac{1}{F(1)},$

  $T_2 = \frac{1}{F(2)} + \frac{\mu(1)}{F(1) \cdot F(2)},$

  $T_3 = \frac{1}{F(3)} + \frac{\mu(2)}{F(1) \cdot F(3)} + \frac{\mu(1)}{F(2) \cdot F(3)} + \frac{(\mu(1))^2}{F(1) \cdot F(2) \cdot F(3)}$
- $T_x = \sum_{1 \le x_1 < \ldots < x_l = x} \frac{\mu(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot \mu(x_l - x_{l-1})}{F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_l)}$

$$\Rightarrow \quad E_\mu(T_x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \le x_1 < \ldots < x_l \le n} \frac{\mu(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot \mu(x_l - x_{l-1})}{F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_l)}$$

# Herleitung der oberen Schranke

- $$\begin{aligned} L &:= \lfloor \log_2 n \rfloor, \\ I_i &:= \left\langle 2^i, 2^{i+1} - 1 \right\rangle,\ 0 \le i < L, \\ I_L &:= \left\langle 2^L, n \right\rangle, \\ p_i &:= \sum_{d \in I_i} \mu(d),\ 0 \le i \le L \end{aligned}$$
- $Pr\left(X_t \le X_{t-1} - 2^{i-1} \mid X_{t-1} \ge 2^i\right) \ge p_{i-1},\ t \ge 1,\ i \ge 1$

# Herleitung der oberen Schranke

- $$\begin{aligned} L &:= \lfloor \log_2 n \rfloor, \\ I_i &:= \left\langle 2^i, 2^{i+1} - 1 \right\rangle,\ 0 \leq i < L, \\ I_L &:= \left\langle 2^L, n \right\rangle, \\ p_i &:= \sum_{d \in I_i} \mu(d),\ 0 \leq i \leq L \end{aligned}$$
- $Pr\left(X_t \leq X_{t-1} - 2^{i-1} \mid X_{t-1} \geq 2^i\right) \geq p_{i-1},\ t \geq 1,\ i \geq 1$
- $T_x \leq \frac{2}{p_{j-1}} + \frac{2}{p_{j-2}} + \ldots + \frac{2}{p_1} + \frac{3}{p_0},\ x \in I_j$
- $T_x \leq (2j+1)\frac{L}{\alpha}$ falls $p_0, \ldots, p_{L-1} \geq \frac{\alpha}{L},\ \alpha > 0$ konst.

# Herleitung der oberen Schranke

- $$\begin{aligned} L &:= \lfloor \log_2 n \rfloor, \\ I_i &:= \left\langle 2^i, 2^{i+1} - 1 \right\rangle,\ 0 \le i < L, \\ I_L &:= \left\langle 2^L, n \right\rangle, \\ p_i &:= \sum_{d \in I_i} \mu(d),\ 0 \le i \le L \end{aligned}$$
- $Pr\left(X_t \le X_{t-1} - 2^{i-1} \mid X_{t-1} \ge 2^i\right) \ge p_{i-1},\ t \ge 1,\ i \ge 1$
- $T_x \le \frac{2}{p_{j-1}} + \frac{2}{p_{j-2}} + \ldots + \frac{2}{p_1} + \frac{3}{p_0},\ x \in I_j$
- $T_x \le (2j+1)\frac{L}{\alpha}$ falls $p_0, \ldots, p_{L-1} \ge \frac{\alpha}{L},\ \alpha > 0$ konst.

$\Rightarrow E_\mu(T_x) = O((\log x)(\log n)) = O\left((\log n)^2\right)$

# Eine untere Schranke für den diskreten Prozess

Satz:

$$E_\mu\left(T_x\right) = \Omega\left(\left(\log n\right)^2\right) \quad \forall\, \mu$$

Beweis: (später)

Voraussetzung:

$\mu$ fest, $\mu(1) > 0$, $I_0, \ldots, I_L$, $\forall 0 \leq i \leq L:\ p_i$

# Intuitive Herangehensweise

- $E\left(\text{t zum Durchlaufen von } I_i \text{ bei Start in } I_{i+1}\right) \geq \frac{1}{p_{i+1}+p_i+p_{i-1}+p_{i-2}}$
- $E\left(T_x\right) \geq \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}-1} \frac{\beta}{p_{2j+1}+p_{2j}+p_{2j-1}+p_{2j-2}}$, falls
  $\exists \beta > 0$ konst. $\forall\, 0 \leq i < L-1 :\ I_{i+1}$ mit Wahrscheinlichkeit $\beta$ besucht

$\Rightarrow E\left(T_x\right) \geq \beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Omega\left(L^2\right) = \Omega\left(\left(\log n\right)^2\right)$

# Intervallbezogene Betrachtungsweise

- $Y := (Y_0, Y_1, \ldots)$
  - $Y_t \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \; X_t \text{ gleichmäßig in } \langle 1, Y_t \rangle \text{ verteilt} \\ = 0 & \Rightarrow \; X_t = 0 \end{cases}$
  - $Y_{t-1} \in \langle 1, n \rangle, \; d \in D$ bzgl. $\mu, \; d \leq Y_{t-1}$

$$\Rightarrow Y_t = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = d \quad \text{mit Wahrsch. } \frac{1}{y} \\ Y_{t-1} - d & \text{falls } x > d \quad \text{mit Wahrsch. } \frac{y-d}{y} \\ d - 1 & \text{falls } x < d \quad \text{mit Wahrsch. } \frac{d-1}{y} \end{cases}$$

- $Pr\left(Y_t = y' | Y_{t-1} = y\right)$
- $T_y := \min\{t | Y_t = 0\}$

$\Rightarrow E_\mu\left(T_x\right) = E_\mu\left(T_y\right)$

# Vorüberlegungen zur Potenzialfunktion $\Phi$

- Ziel: $$\begin{aligned}&\Phi(Y_0) = \Omega\left((\log n)^2\right),\\ &E\left(\Phi\left(Y_{t-1}\right) - \Phi\left(Y_t\right) \mid Y_{t-1} = y\right) = O\left(1\right)\\ &\Rightarrow\ E\left(T_y\right) = \Omega\left(\Phi\left(Y_0\right)\right)\end{aligned}$$
- $\psi_i := \frac{1}{\sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i|}}$, c konst. mit $\frac{1}{2} < c < 1$
- $\sum_{i=1}^{L-1} \psi_i^{-1} = \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i|} = \sum_{j=0}^{L} p_j \sum_{i=1}^{L-1} c^{|j-i|} = O\left(1\right)$

# Definition der Potenzialfunktion $\Phi$

Definition:

$$\begin{aligned}
\sigma_a &:= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \cdot 2^{\frac{-|\log a - \log d|}{2}} = \sum_{d=1}^{a} \mu(d) \sqrt{\frac{d}{a}} + \sum_{d=a+1}^{n} \mu(d) \sqrt{\frac{a}{d}}, \\
\varphi_a &:= \frac{1}{a\sigma_a}, \ 1 \leq a \leq n, \\
\Phi(y) &:= \sum_{a=1}^{y} \varphi_a, \ 0 \leq y \leq n, \\
\Phi_t &:= \Phi(Y_t), \ t = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

# Folgerungen zur Potenzialfunktion $\Phi$

## Lemma

1. $\Phi_t, \ t \geq 0$ *steigt nicht, wenn* $t$ *steigt*
2. $\Phi_t = 0 \Leftrightarrow Y_t = 0$
3. $\Phi_0 = \Omega\left((\log n)^2\right)$

## Beweis: (zu 3)

- $i(a) := \lfloor \log_2 a \rfloor = \max\{i \mid 2^i \leq a\}$
- $\sigma_a = \ldots \leq 2c \cdot \left( \sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i(a)|} \right)$ *für* $c := \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\sum_{a \in I_i} \varphi_a = \sum_{a \in I_i} \frac{1}{a\sigma_a} \geq \frac{2^i}{2c \cdot 2^{i+1} \cdot \left( \sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i|} \right)} = \frac{\psi_i}{4c}$

$\Rightarrow \quad \Phi_0 \geq \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\psi_i}{4c}$

## Beweis: (zu 3)

- $i(a) := \lfloor \log_2 a \rfloor = \max\{i \mid 2^i \leq a\}$
- $\sigma_a = \ldots \leq 2c \cdot \left( \sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i(a)|} \right)$ *für* $c := \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\sum_{a \in I_i} \varphi_a = \sum_{a \in I_i} \frac{1}{a\sigma_a} \geq \frac{2^i}{2c \cdot 2^{i+1} \cdot \left( \sum_{j=0}^{L} p_j \cdot c^{|j-i|} \right)} = \frac{\psi_i}{4c}$

$\Rightarrow \quad \Phi_0 \geq \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\psi_i}{4c}$

- $u_i := \frac{4c}{\psi_i},\ 0 \leq i < L,\ \sum_{i=0}^{L-1} u_i \leq k,\ k$ *konst.*
- $\sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{u_i}$ *minimal, falls* $\forall u_i : u_i = \frac{k}{L}$

$\Rightarrow \quad \Phi_0 \geq L \cdot \frac{L}{k} = \frac{L^2}{k} = \Omega\left( (\log n)^2 \right)$

# Das Hauptlemma

Lemma: (Hauptlemma)

$\exists C$ *konst.* $\forall 0 \leq y \leq n : E\left(\Phi_{t-1} - \Phi_t \mid Y_{t-1} = y\right) \leq C$

Beweis: (später)

Lemma:

- $R_1, R_2, \ldots$ *beschränkte Zufallsvariablen*
- $g > 0$
- $S := \min\{t \mid R_1 + \ldots + R_t \geq g\}$

*Es gilt:* $E(S) < \infty, \; E(R_t \mid S \geq t) \leq C \; \forall t \in N \; \Rightarrow \; E(S) \geq \frac{g}{C}$

Beweis: $(\forall \mu : \; E_\mu(T_x) = \Omega\left((\log n)^2\right))$

- $T_\Phi = \min\{t \mid \Phi_t = 0\} = \min\{t \mid Y_t = 0\} = T_y$

*bleibt zu zeigen:* $E(T_\Phi) = \Omega\left((\log n)^2\right)$

- $R_t := \Phi_{t-1} - \Phi_t$
- $\forall y \geq 1 : \; E(R_t \mid Y_{t-1} = y) \leq C$
  $\Rightarrow \; E(R_t \mid T_y \geq t) = E(R_t \mid Y_{t-1} > 0) \leq C$
- $R_1 + \ldots + R_t = \Phi_0 - \Phi_t$
  $\Rightarrow \; T_\Phi = min\{t \mid R_1 + \ldots + R_t \geq \Phi_0\}$

$\Rightarrow E(T_\Phi) = \Omega\left((\log n)^2\right)$

Beweis: $\left(E\left(\Phi_{t-1} - \Phi_t \mid Y_{t-1} = y\right) = O\left(1\right)\right)$

- $E\left(\Phi_{t-1} - \Phi_t | Y_{t-1} = y\right) = \sum_{y'=0}^{y} \Delta\left(y, y'\right)$

  *wobei* $\Delta\left(y, y'\right) = \left(\Phi\left(y\right) - \Phi\left(y'\right)\right) \cdot Pr\left(Y_t = y' | Y_{t-1} = y\right)$
- $\Delta\left(y, y\right) = 0$
- $\Delta\left(y, 0\right) = \frac{1}{y} \cdot \left(\sum_{d \leq y} \mu(d)\right) \cdot \left(\sum_{a \leq y} \varphi(a)\right) \leq \frac{1}{y} \sum_{a \leq y} \frac{\sqrt{y}}{a} \leq \frac{\ln(y)+1}{\sqrt{y}} < 2$

## Beweis: (Fortsetzung)

- $$\sum_{y'=1}^{y-1} \Delta(y, y') = \sum_{y'=1}^{y-1} \left( \sum_{a=y'+1}^{y} \varphi_a \right) \cdot \frac{y'}{y} \left( \mu(y'+1) + \mu(y-y') \right) =$$
  $$= \frac{1}{y} \cdot \sum_{a=2}^{y} (\lambda_a + \gamma_a)$$
  $$\textit{wobei } \lambda_a = \varphi_a \cdot \sum_{y'=1}^{a-1} \mu(y'+1)\, y' \textit{ und } \gamma_a = \varphi_a \cdot \sum_{y'=1}^{a-1} \mu(y-y')\, y'$$

## Beweis: (Fortsetzung)

- $$\sum_{y'=1}^{y-1} \Delta(y,y') = \sum_{y'=1}^{y-1} \left( \sum_{a=y'+1}^{y} \varphi_a \right) \cdot \frac{y'}{y} \left( \mu(y'+1) + \mu(y-y') \right) =$$
  $$= \frac{1}{y} \cdot \sum_{a=2}^{y} (\lambda_a + \gamma_a)$$
  *wobei* $\lambda_a = \varphi_a \cdot \sum_{y'=1}^{a-1} \mu(y'+1)\, y'$ *und* $\gamma_a = \varphi_a \cdot \sum_{y'=1}^{a-1} \mu(y-y')\, y'$
- $$\lambda_a \leq \frac{\sum_{b=1}^{a} \mu(b)(b-1)}{\sum_{b=1}^{a} \mu(b)\sqrt{ab}} < 1,$$
  $$\gamma_a \leq \sqrt{\frac{y}{y-a+1}} + \sqrt{\frac{y}{a}}$$
- $$\sum_{y'=1}^{y-1} \Delta(y,y') < \frac{1}{y} \cdot \sum_{a=2}^{y} \left( 1 + \sqrt{\frac{y}{y-a+1}} + \sqrt{\frac{y}{a}} \right) < 5$$

$$\Rightarrow \sum_{y'=0}^{y} \Delta(y,y') < 0 + 2 + 5 = 7$$

# Der stetige Prozess

- $A := [0, n+1)\,,\ n \in \mathbb{N},\ x \in A$
- $D := (0, n+1)\,,\ \mu,\ d \in D$
- $X := (X_0, X_1, \ldots)$
  - $X_0 \in [1, n+1)$
  - $X_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{falls } X_{t-1} < d \\ 0 & \text{falls } X_{t-1} \in [d, d+1) \\ X_{t-1} - d & \text{falls } X_{t-1} \geq d+1 \end{cases} \quad , \ t \in N$
- $T_x := \min\{t \,|\, X_t = 0\}$

$\Rightarrow E_\mu\,(T_x)$

# Mein Fazit:

- die Vorkenntnisse
- das Thema
- die Beweise