Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Sven Kosub

WS 2002/2003
Endklausur
10.2.2003

Grundlegende Algorithmen

Es sind insgesamt **40** Punkte zu erreichen.
Bitte schreiben Sie nicht mit roter oder grüner Farbe und nicht mit Bleistift.
Begründen Sie alle Ihre Schritte.
Die Bearbeitungszeit beträgt **90** Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $n^2 = O\left(2^{n(-1)^n}\right)$

(b) $\log(\log n) = o\big((\log n)^2\big)$

(c) $\frac{1}{n} = \omega\big(\frac{1}{\log n}\big)$

(d) $\displaystyle\prod_{r=2}^{n}\left(r - \frac{1}{r}\right) = \Theta(n!)$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Geben Sie den Entscheidungsbaum für einen Algorithmus Ihrer Wahl zur Berechnung des Medians von 3 Elementen an.

(b) Der Algorithmus Median_von_Drei(a, b, c) berechne den Median der drei Elemente a, b, c. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus Select:

```
Select(A[], 9)
begin
    a := Median_von_Drei(A[0], A[1], A[2]);
    b := Median_von_Drei(A[3], A[4], A[5]);
    c := Median_von_Drei(A[6], A[7], A[8]);
    return Median_von_Drei(a, b, c);
end
```

- Bitte wenden -

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn der Algorithmus SELECT auf neun im Array $A[]$ gegebene Elemente angewendet wird und als Ergebnis x liefert? Begründen Sie alle Ihre Antworten.

1. Das Element x ist der Median von $A[]$.
2. Mindestens 3 Elemente von $A[]$ sind kleiner gleich x.
3. Mindestens 3 Elemente von $A[]$ sind größer gleich x.
4. SELECT benötigt mindestens 8 und höchstens 12 Vergleiche, um x zu bestimmen. Nehmen Sie dabei an, dass der Algorithmus MEDIAN_VON_DREI stets mit der minimal notwendigen Anzahl von Vergleichen auskommt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass ein (a, b)-Baum mit n Blättern mindestens Höhe $\lceil \log_b(n) \rceil$ und höchstens Höhe $\lceil \log_a(\frac{n}{2}) \rceil + 1$ hat.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Zeichenkette $v \in \Sigma^*$ heißt *zyklische Rotation* einer Zeichenkette $w \in \Sigma^*$, wenn es $x, y \in \Sigma^*$ gibt, so dass $v = xy$ und $w = yx$ gilt. Zum Beispiel ist BAUHAUS eine zyklische Rotation von HAUSBAU.

Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der für zwei Zeichenketten v und w mit einer linearen Anzahl von Vergleichen, d.h. mit $O(|v| + |w|)$ Vergleichen, feststellt, ob v eine zyklische Rotation von w ist.