

---

## Grundlegende Algorithmen

---

Es sind insgesamt **80** Punkte zu erreichen.  
Bitte schreiben Sie nicht mit roter oder grüner Farbe und nicht mit Bleistift.  
Begründen Sie alle Ihre Schritte.  
Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

**Viel Erfolg!**

---

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(n) = \begin{cases} 2f\left(\frac{n}{3}\right) + 3n & \text{für } n > 1 \\ 2 & \text{für } n = 1 \end{cases}$$
$$g(n) = \begin{cases} n^2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a)  $f(n) = O(n)$ .
- (b)  $n^4 = O(g)$ .
- (c)  $g = \omega(n \log n)$ .
- (d)  $2^{3n} = o(3^{2n})$ .

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein *arithmetischer Baum* ist ein Binärbaum, bei dem jeder innere Knoten genau 2 Nachfolger hat und eines der Symbole  $\cdot$  oder  $+$  enthält. Jedes Blatt enthält eine ganze Zahl. Der Wert eines arithmetischen Baumes  $T$  ist induktiv wie folgt definiert: Falls  $T$  ein Blatt ist, das die Zahl  $z$  enthält, dann ist  $W(T) = z$ . Ansonsten seien  $T_1$  und  $T_2$  die beiden Teilbäume von  $T$  und  $\circ \in \{\cdot, +\}$  das in der Wurzel von  $T$  gespeicherte Symbol. Der Wert von  $T$  ist  $W(T) = W(T_1) \circ W(T_2)$ .

Ein *arithmetischer Ausdruck* ist wie folgt definiert: Jede Zahl ist ein arithmetischer Ausdruck. Falls  $A$  und  $B$  arithmetische Ausdrücke sind, dann sind  $(A + B)$  und  $A \cdot B$  arithmetische Ausdrücke. Der Wert eines arithmetischen Ausdrucks ergibt sich durch Ausrechnen, wobei die üblichen Rechenregeln verwendet werden.

Ein arithmetischer Baum  $T$  ist genau dann zu einem arithmetischen Ausdruck  $A$  äquivalent, wenn  $W(T) = W(A)$  gilt.

- (a) Geben Sie zwei verschiedene arithmetische Bäume an, die zu dem arithmetischen Ausdruck  $((2+3) \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot (1+2))$  äquivalent sind. Wenden Sie die Funktion  $W$  auf beide Bäume an und zeichnen Sie an jedem Knoten  $v$  den von  $W$  gelieferten Wert für den mit  $v$  gewurzelten Teilbaum ein.
- (b) Geben Sie einen Algorithmus an, der zu jedem arithmetischen Ausdruck einen äquivalenten arithmetischen Baum konstruiert.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Minimum und Maximum einer  $n$ -elementigen Menge können gleichzeitig mit maximal  $n + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$  Vergleichen bestimmt werden.

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben seien die Hashfunktion  $h(k) = k \bmod 11$  und die Folge  $L = (1, 12, 7, 20, 2, 15, 24, 37, 40)$ .

- (a) Fügen Sie die Elemente von  $L$  der Reihe nach in die Hashtabelle  $H$  ein, wobei sie Kollisionen durch Verkettung auflösen. Wie viele Vergleiche sind im Worst-Case nötig, um ein Element zu finden.
- (b) Fügen Sie die Elemente von  $L$  der Reihe nach in die Hashtabelle  $H$  ein, wobei sie Kollisionen durch lineare Sondierung auflösen. Wie viele Vergleiche sind im Worst-Case nötig, um ein Element zu finden.

### Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ist folgender Sortieralgorithmus korrekt? *Hinweis:* Achten Sie auf die Anzahl der Vergleiche.

```

(0)  BinSort(A[], l, r)
(1)  begin
(2)    n := (r - l) + 1;
(3)    if n < 3 then return MergeSort(A[]);
(4)    for i := 0 to (2⌈ $\frac{n}{3}$ ⌉ - 1) do B[l + i] := A[l + i];
(5)    for i := 2⌈ $\frac{n}{3}$ ⌉ to (n - 1) do C[l + i] := A[l + i];
(6)    Teile B wie bei QUICKSORT auf, wobei p der Rang des Pivotelements ist
(7)    BinSort(B[], 0, p - 1);
(8)    BinSort(B[], p, 2⌈ $\frac{n}{3}$ ⌉ - 1);
(9)    return BinInsert(B[], C[]);
(10) end

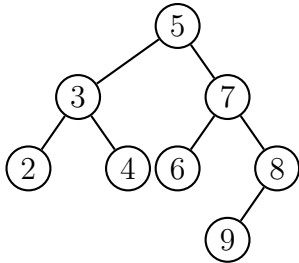
```

Der Algorithmus BININSERT( $X[], Y[]$ ) fügt ein unsortiertes Feld  $Y$  der Größe  $n$  in ein sortiertes Feld  $X$  der Größe  $m$  ein, so dass ein sortiertes Feld entsteht, und benötigt dafür höchstens  $m + 2n$  Vergleiche.

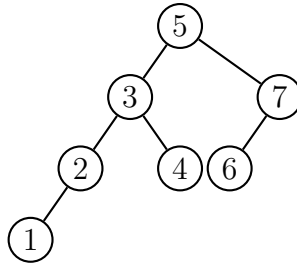
## Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Welche der folgenden Bäume sind AVL-Bäume? Begründen Sie Ihre Antwort.

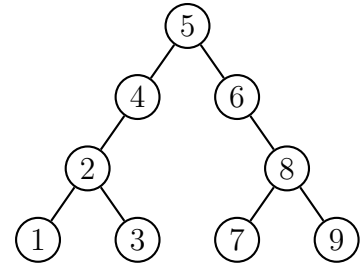
(i)



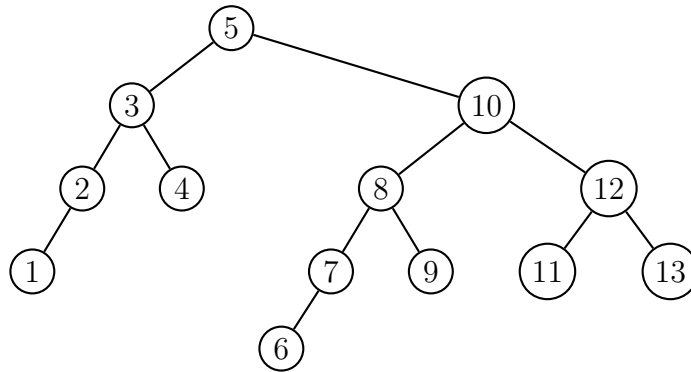
(ii)



(iii)



(b) Löschen Sie den Knoten mit Schlüssel 4 aus folgendem AVL-Baum und rebalancieren Sie, um wieder einen AVL-Baum zu erhalten. Dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise!



## Aufgabe 7 (10 Punkte)

Gegeben sei der folgende Text  $T$ :

EINMAL\_TRIFFT\_EINSTEIN\_WITGENSTEIN

- (a) Bestimmen Sie das kleinstmögliche dem Text  $T$  zugrunde liegende Alphabet  $\Sigma$ , sowie die Häufigkeit  $h(a)$  für jeden Buchstaben  $a \in \Sigma$ .
- (b) Finden Sie einen optimalen Präfix-Code  $\varphi$  bzgl.  $T$  (bzw.  $h$ ) über dem Alphabet  $\{0, 1\}$  und berechnen Sie seine Länge  $\sum_{a \in \Sigma} h(a)|\varphi(a)|$  (in Bits).

## Aufgabe 8 (10 Punkte)

Betrachten Sie Wörter über dem einelementigen Alphabet  $\Sigma = \{a\}$ . Für das Wort  $\underbrace{aa \dots a}_{n\text{-mal}}$  der Länge  $n$  verwenden wir  $a^n$  als Abkürzung. Geben Sie in Abhängigkeit von  $n$  in  $\Theta$ -Notation die Tiefe des Präfix-Baumes an, der bei Eingabe von  $a^n$  mit  $n \geq 1$  vom LEMPEL-ZIV-WELCH-Algorithmus konstruiert wird.