

---

## Randomisierte Algorithmen

---

*Abgabetermin.* Montag, den 25.11.2002 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten (18 Punkte)

Angenommen man bekommt eine Münze, von der man weiß, daß  $\mathbb{P}[\text{Kopf}] = p \geq a$  für ein festes  $a$  gilt. Wenn wir keine weitere Information über  $p$  haben, dann soll ein Wert  $\hat{p}$  geschätzt werden, für den gilt:

$$\mathbb{P}[|p - \hat{p}| \geq \epsilon p] \leq \delta,$$

für beliebige aber feste  $a > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\delta < 1$ .

Sei  $N$  die Anzahl Würfe die gemacht werden, um  $\hat{p}$  zu erhalten. Wie groß muß  $N$  mindestens sein, damit die oben angegebene Abschätzung gilt?

### Aufgabe 2 Martingal I (11 Punkte)

Angenommen wir haben eine Kiste, in der sich  $s_0$  schwarze und  $w_0$  weiße Bälle befinden. Wir führen folgendes Spiel aus: Wir ziehen zufällig einen der Bälle und legen ihn zusammen mit  $c$  zusätzlichen Bällen seiner eigenen Farbe zurück. Sei  $X_i = s_i/(s_i + w_i)$  der Bruchteil der schwarzen Bälle in der Kiste nachdem wir  $i$  Bälle gezogen und zurückgelegt haben.

Zeigen Sie, daß die Sequenz  $X_0, X_1, \dots$  ein Martingal ist.

### Aufgabe 3 Martingal II (11 Punkte)

Angenommen wir werfen  $m$  Bälle in  $n$  Kisten. Sei  $Z$  die Zufallsvariable, die die Anzahl der Kisten zählt, in der kein Ball liegt, nachdem alle Bälle geworfen wurden.

Wir definieren die Zufallsvariable  $Z_t$  als den Erwartungswert von  $Z$  nachdem  $0 \leq t \leq m$  Bälle in die Kisten geworfen wurden. (Es ist klar, daß  $Z_t$  von der Anzahl und der Lage der bisher geworfenen Bälle abhängt.)

Zeigen Sie, daß die Sequenz  $Z_0, Z_1, \dots, Z_m$  ein Martingal ist und daß  $Z_0 = \mathbb{E}[Z]$  und  $Z_m = Z$  gilt.

## Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza

Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de