Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 8
11. Juni 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Gegeben ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Was ist die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

Aufgabe 2

Der Mathematiker J. Bertrand stellte 1888 folgende Frage, um einen Einwand gegen die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten bei überabzählbaren Ereignismengen zu konstruieren:

> *Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig in einen Kreis gezeichnete Sehne länger als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?*

Wir werden diesen Einwand, der auch als "Bertrands Paradox" bekannt ist, im folgenden nachvollziehen und widerlegen.

a) *Die erste Lösung.* Beantworten Sie Bertrands Frage unter der Annahme "Jede Sehne eines Kreises ist durch ihre 2 Endpunkte auf dem Kreisbogen eindeutig bestimmt".

b) *Die zweite Lösung.* Beantworten Sie Bertrands Frage unter der Annahme "Jede Sehne hat einen Mittelpunkt. Der Mittelpunkt liegt entweder im Inkreis des Dreiecks oder außerhalb".

c) *Kein Paradoxon.* Lösen Sie das Paradoxon auf!

(Bemerkung: Es gibt noch mehr Lösungswege als die a) und b) gezeigten. Siehe hierzu auch S. 103 und 104 des DS-II Buchs von Schickinger / Steger, in welchem unter anderem Teilaufgabe b) besprochen wird.)

Aufgabe 3

Eine Dichte im $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtnegative integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \; \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$$

und

$$\Pr[\; a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_n \le X_n \le b_n \;] = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \; \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion ist durch

$$F(x) = \Pr[\{y \in \mathbb{R}^n \;:\; y \le x\}]$$

gegeben. Sei $F(x, y)$ eine auf $\mathbb{R}^2$ stetige Funktion, die in jeder Koordinate monoton wachsend ist und für die $F(0, 0) = 0$ sowie $F(1, 1) = 1$ gilt. Ferner sei F für gegebenes x nur an endlich vielen y nicht differenzierbar und umgekehrt. Zeigen Sie, dass es ein solches F gibt, das keine Verteilungsfunktion ist.

Aufgabe 4

Zwei reelle Zahlen x und y werden zufällig (gleichverteilt) aus $]0, 1[$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $[x/y]$ (die zu x/y am nächsten liegende ganze Zahl) gerade ist?
(Hinweis: Wir sehen 0 für diese Aufgabe als gerade Zahl an. Am besten geben Sie Ihre Antwort in der Form $r + s \cdot \pi$ mit rationalen Zahlen r und s an.)