WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-19-2003

Summation und Differenzenoperator

Satz

Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\,.$$

Beweis.

Klar. □

Beispiel

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0-2+8 = 6$$

Summation und Differenzenoperator

Satz

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\ .\end{aligned}$$

Beweis.

Klar. □

Beispiel

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0-2+8=6$$

Summation und Differenzenoperator

Satz

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\,.\end{aligned}$$

Beweis.

Klar. $\square$

Beispiel

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0-2+8=6$$

Summation und Differenzenoperator

Satz

Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\,.$$

Beweis.

Klar. $\square$

Beispiel

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

Fallende Fakultät

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$$

Damit für $n = -1$ "formal":

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Fallende Fakultät

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$$

Damit für $n = -1$ "formal":

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Fallende Fakultät

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$$

Damit für $n = -1$ "formal":

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Fallende Fakultät

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$$

Damit für $n = -1$ "formal":

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Fallende Fakultät

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$$

Damit für $n = -1$ "formal":

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Lemma

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis

(gezeigt wird nur 1.)

1. $n > 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\
&= (x+1) \cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1) \cdot x^{\underline{n-1}} \\
&= n \cdot x^{\underline{n-1}}
\end{aligned}$$

2. $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis

(gezeigt wird nur 1.)

1. $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

2. $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis

(gezeigt wird nur 1.)

1. $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}} \\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

2. $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis

(gezeigt wird nur 1.)

1. $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

2. $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

3. $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}$$

q. e. d.

3. $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}
$$

q. e. d.

3. $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}
$$

q. e. d.

3. $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}$$

q. e. d.

Diskrete Stammfunktion

Definition

Sei f so, daß $\Delta f = g$. Dann heißt f eine *diskrete Stammfunktion von* g. *Schreibweise:* $f = \sum g$.

Satz

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis.

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Diskrete Stammfunktion

Definition

Sei f so, daß $\Delta f = g$. Dann heißt f eine *diskrete Stammfunktion von g*. *Schreibweise:* $f = \sum g$.

Satz

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis.

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

Diskrete Stammfunktion

Definition

Sei f so, daß $\Delta f = g$. Dann heißt f eine *diskrete Stammfunktion von* g. *Schreibweise:* $f = \sum g$.

Satz

Sei f *eine diskrete Stammfunktion von* g. *Dann gilt:*

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis.

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Beispiel

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}} .$$

Dann ist

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} .
\end{aligned}
$$

Beispiel

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel

Was ist $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1}\\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2}\\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}} \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \,.
\end{aligned}
$$

Beispiel

Was ist $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt: $\quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\ ,$$

wie wir in 5.4 gesehen haben.

Beispiel

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\ ,$$

wie wir in 5.4 gesehen haben.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} .
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} .
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}}\,.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1}(n+1)^{\underline{k+1}} .
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)\ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) \,.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \,.
\end{aligned}$$

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) \; .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \; .
\end{aligned}$$

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) \, .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \, .
\end{aligned}$$

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)\ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x)\ .
\end{aligned}$$

□

Lemma (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) \, .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \underbrace{- f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} \\
&\qquad - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \, .
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta \binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}.\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\Delta \binom{x}{m+1} = \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1}$$

$$= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m} .$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}\,.\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\Delta \binom{x}{m+1} = \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1}$$
$$= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m} .$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\cdot H_k = \left(\sum\binom{x}{m}\cdot H_x\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}$$

$$= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum\binom{x+1}{m+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}$$

$$= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1}\cdot\sum\binom{x}{m}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}$$

$$= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1}\cdot\binom{x}{m+1}\Bigg|_{x=1}^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{m+1}\cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1}\cdot H_1$$

$$- \left(\frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\binom{1}{m+1}\right)$$

$$= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) + 0\,.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\cdot H_k &= \left(\sum\binom{x}{m}\cdot H_x\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum\binom{x+1}{m+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1}\cdot\sum\binom{x}{m}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1}\cdot\binom{x}{m+1}\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{m+1}\cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1}\cdot H_1\\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\binom{1}{m+1}\right)\\
&= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) + 0\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0\,.
\end{aligned}
$$

Lemma (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k} .$$

Beweis.

$f(x)$ kann eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 4 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} .$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} .$$

$\square$

Beweis.

$f(x)$ kann eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 4 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}}\ .$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}\ .$$

□

Beweis.
$f(x)$ kann eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 4 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} .$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} .$$

$\square$

Beispiel

Es ist

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \,.$$

Also gilt auch

$$k! \cdot S_{n,k} = \Delta^k \cdot x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,,$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,.$$

Beispiel

Es ist

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \,.$$

Also gilt auch

$$k! \cdot S_{n,k} = \Delta^k \cdot x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,,$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,.$$

Beispiel

Es ist

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \,.$$

Also gilt auch

$$k! \cdot S_{n,k} = \Delta^k \cdot x^n\big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,,$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,.$$