WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

02-10-2004

Das Problem des Handlungsreisenden

Sei $G = (V, E, w)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit einer nichtnegativen Gewichtung $w : E \to \mathbb{R}^+$ der Kanten.

Definition

Ein Hamiltonscher Kreis in G heißt *Traveling Salesman/Salesperson Tour, falls seine durch w gegebene Länge minimal unter allen Hamiltonschen Kreisen ist.*

TSP ist das Traveling Salesperson Problem. Als Optimierungsproblem verlangt es, zu einem gegebenen $G = (V, E, w)$ eine optimale Tour zu finden. Als Entscheidungsproblem verlangt es, gegeben $G = (V, E, w)$ und eine Zahl $C \in \mathbb{R}^+$, zu entscheiden, ob es in G eine Tour mit einer Länge $\leq C$ gibt.

Das Problem des Handlungsreisenden

Sei $G = (V, E, w)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit einer nichtnegativen Gewichtung $w : E \to \mathbb{R}^+$ der Kanten.

Definition

Ein Hamiltonscher Kreis in G heißt *Traveling Salesman/Salesperson Tour, falls seine durch w gegebene Länge minimal unter allen Hamiltonschen Kreisen ist.*

TSP ist das Traveling Salesperson Problem. Als Optimierungsproblem verlangt es, zu einem gegebenen $G = (V, E, w)$ eine optimale Tour zu finden. Als Entscheidungsproblem verlangt es, gegeben $G = (V, E, w)$ und eine Zahl $C \in \mathbb{R}^+$, zu entscheiden, ob es in G eine Tour mit einer Länge $\le C$ gibt.

Das Problem des Handlungsreisenden

Sei $G = (V, E, w)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit einer nichtnegativen Gewichtung $w : E \to \mathbb{R}^+$ der Kanten.

Definition

Ein Hamiltonscher Kreis in G heißt *Traveling Salesman/Salesperson Tour, falls seine durch w gegebene Länge minimal unter allen Hamiltonschen Kreisen ist.*

TSP ist das Traveling Salesperson Problem. Als Optimierungsproblem verlangt es, zu einem gegebenen $G = (V, E, w)$ eine optimale Tour zu finden. Als Entscheidungsproblem verlangt es, gegeben $G = (V, E, w)$ und eine Zahl $C \in \mathbb{R}^+$, zu entscheiden, ob es in G eine Tour mit einer Länge $\leq C$ gibt.

Wie schon das Hamiltonsche Kreis-Problem ist natürlich auch TSP $\mathcal{NP}$-vollständig. Wir untersuchen mehrere Heuristiken für TSP.

Beispiel

(Rheinlandproblem (nach M. Grötschel))

	A	B	D	F	K	W
Aachen		91	80	259	70	121
Bonn	91		77	175	27	84
Düsseldorf	80	77		232	47	29
Frankfurt	259	175	232		189	236
Köln	70	27	47	189		55
Wuppertal	121	84	29	236	55	

Heuristik *Nächster Nachbar (NN):*

In dieser Heuristik wählt man einen beliebigen Startknoten und findet dann einen hamiltonschen Kreis, indem man wiederholt vom letzten besuchten Knoten zum nächstgelegenen noch nicht besuchten Knoten geht, bis man alle Knoten besucht hat; dann wird der Kreis geschlossen.

Fängt man im Beispiel mit *Köln bzw. Frankfurt an, so ergeben sich folgende Touren:*

$$\begin{array}{ll} K - B - D - W - A - F - K & w = 702 \\ F - B - K - D - W - A - F & w = 658 \end{array}$$

Heuristik *Nächster Nachbar (NN):*

In dieser Heuristik wählt man einen beliebigen Startknoten und findet dann einen hamiltonschen Kreis, indem man wiederholt vom letzten besuchten Knoten zum nächstgelegenen noch nicht besuchten Knoten geht, bis man alle Knoten besucht hat; dann wird der Kreis geschlossen.
Fängt man im Beispiel mit *Köln bzw. Frankfurt an, so ergeben sich folgende Touren:*

$$\begin{array}{ll} K - B - D - W - A - F - K & w = 702 \\ F - B - K - D - W - A - F & w = 658 \end{array}$$

Wir nehmen nun im Folgenden an, dass G vollständig ist und w die Dreiecksungleichung erfüllt, dass also für alle Tripel $u, v, x \in V$ gilt, dass die Kante von u nach v höchstens so lang ist wie der kürzeste Weg von u über x nach v. Diese Variante wird als *metrisches TSP bezeichnet.*

Heuristik *Minimum Spanning Tree (MST):*

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Verdopple alle Kanten in T; das Resultat ist ein *eulerscher* Multigraph. Sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{MST}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Heuristik *Minimum Spanning Tree (MST):*

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Verdopple alle Kanten in T; das Resultat ist ein *eulerscher* Multigraph. Sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{MST}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Heuristik *Minimum Spanning Tree (MST):*

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Verdopple alle Kanten in T; das Resultat ist ein *eulerscher* Multigraph. Sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{MST}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Satz

Sei ein metrisches TSP mit Kostenmatrix (w_{ij}) gegeben. Dann gilt:

$$w(C_{MST}) \leq 2w(C_{opt}) \ .$$

Beweis.

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist jede „Abkürzung" höchstens so lang wie der übersprungene Pfad in T. □

Satz

Sei ein metrisches TSP mit Kostenmatrix (w_{ij}) gegeben. Dann gilt:

$$w(C_{MST}) \leq 2w(C_{opt}) \ .$$

Beweis.

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist jede „Abkürzung“ höchstens so lang wie der übersprungene Pfad in T. $\square$

Christofides' Heuristik (CH):

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Konstruiere ein perfektes Matching M minimalen Gewichts auf der Menge U der Knoten *ungeraden* Grads in T und füge M zu T hinzu; der resultierende Multigraph ist eulersch; sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{CH}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Christofides' Heuristik (CH):

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Konstruiere ein perfektes Matching M minimalen Gewichts auf der Menge U der Knoten *ungeraden* Grads in T und füge M zu T hinzu; der resultierende Multigraph ist eulersch; sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{CH}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Christofides' Heuristik (CH):

1. Konstruiere in $G = (V, E, w)$ einen minimalen Spannbaum T;
2. Konstruiere ein perfektes Matching M minimalen Gewichts auf der Menge U der Knoten *ungeraden* Grads in T und füge M zu T hinzu; der resultierende Multigraph ist eulersch; sei C darin ein eulerscher Kreis.
3. Mache C zu einem hamiltonschen Kreis C_{CH}, indem (von einem beliebigen Knoten aus startend) schon besuchte Knoten entlang C übersprungen werden.

Satz

Sei ein metrisches TSP mit Kostenmatrix (w_{ij}) gegeben. Dann gilt:

$$w(C_{CH}) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) \ .$$

Beweis

Zunächst gilt $w(T) \leq w(C_{opt})$. Sei $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1$ die Reihenfolge, in der eine *optimale* Tour die Knoten in U besucht, sei M_1 das Matching, das jeden *ungeraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit dem darauffolgenden Knoten verbindet, und sei M_2 das Matching, das jeden *geraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit seinem Nachfolger verbindet.

Satz

Sei ein metrisches TSP mit Kostenmatrix (w_{ij}) *gegeben. Dann gilt:*

$$w(C_{CH}) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) .$$

Beweis

Zunächst gilt $w(T) \leq w(C_{opt})$. Sei $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1$ die Reihenfolge, in der eine *optimale* Tour die Knoten in U besucht, sei M_1 das Matching, das jeden *ungeraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit dem darauffolgenden Knoten verbindet, und sei M_2 das Matching, das jeden *geraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit seinem Nachfolger verbindet.

Satz

Sei ein metrisches TSP mit Kostenmatrix (w_{ij}) gegeben. Dann gilt:

$$w(C_{CH}) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) \ .$$

Beweis

Zunächst gilt $w(T) \leq w(C_{opt})$. Sei $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1$ die Reihenfolge, in der eine *optimale* Tour die Knoten in U besucht, sei M_1 das Matching, das jeden *ungeraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit dem darauffolgenden Knoten verbindet, und sei M_2 das Matching, das jeden *geraden* Knoten in dieser Reihenfolge mit seinem Nachfolger verbindet.

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt dann

$$w(M_1) + w(M_2) \leq w(C_{opt}) \ .$$

Da aber M als optimales Matching konstruiert wurde, gilt

$$w(M) \leq w(M_1) \text{ und } w(M) \leq w(M_2) \ ,$$

also

$$w(C_{CH}) \leq w(T) + w(M) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) \ .$$

q. e. d.

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt dann

$$w(M_1) + w(M_2) \leq w(C_{opt}) \ .$$

Da aber M als optimales Matching konstruiert wurde, gilt

$$w(M) \leq w(M_1) \text{ und } w(M) \leq w(M_2) \ ,$$

also

$$w(C_{CH}) \leq w(T) + w(M) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) \ .$$

q. e. d.

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt dann

$$w(M_1) + w(M_2) \leq w(C_{opt}) \ .$$

Da aber M als optimales Matching konstruiert wurde, gilt

$$w(M) \leq w(M_1) \text{ und } w(M) \leq w(M_2) \ ,$$

also

$$w(C_{CH}) \leq w(T) + w(M) \leq \frac{3}{2} w(C_{opt}) \ .$$

q. e. d.

Färbung von Graphen

Definition

Eine *Knotenfärbung (vertex coloring) eines Graphen* $G = (V, E)$ *mit* k *Farben ist eine Abbildung* $c : V \to \{1, \ldots, k\}$*, so dass gilt*

$$c(u) \neq c(v) \qquad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E\,.$$

Die chromatische Zahl (chromatic number) $\chi(G)$ *ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von* G *benötigt werden.*

Färbung von Graphen

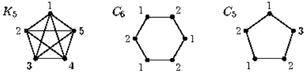
Definition

Eine *Knotenfärbung (vertex coloring) eines Graphen* $G = (V, E)$ *mit* k *Farben ist eine Abbildung* $c : V \to \{1, \ldots, k\}$, *so dass gilt*

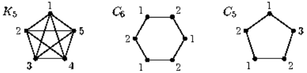
$$c(u) \neq c(v) \qquad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E\ .$$

Die chromatische Zahl (chromatic number) $\chi(G)$ *ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von* G *benötigt werden.*

Beispiel



Beispiel



Graphen mit chromatischer Zahl 2 sind gemäß Definition genau die *bipartiten Graphen.*

Satz

Ein Graph $G = (V, E)$ *ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.*

Beweis.

siehe Hausaufgabe! □

Graphen mit chromatischer Zahl 2 sind gemäß Definition genau die *bipartiten Graphen.*

Satz

Ein Graph $G = (V, E)$ *ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.*

Beweis.

siehe Hausaufgabe! $\square$

Satz ((Vierfarbensatz))

Für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.

Beweis.

siehe Appel und Haken 1977. □

Bemerkung: Der Beweis zum Vierfarbensatz liefert auch einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V|^2)$, der planare Graphen mit höchstens vier Farben färbt. *Jedoch: Die Frage*

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?“

ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Satz ((Vierfarbensatz))

Für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.

Beweis.

siehe Appel und Haken 1977. □

Bemerkung: Der Beweis zum Vierfarbensatz liefert auch einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V|^2)$, der planare Graphen mit höchstens vier Farben färbt. *Jedoch: Die Frage*

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?“

ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Satz ((Vierfarbensatz))

Für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.

Beweis.

siehe Appel und Haken 1977. $\square$

Bemerkung: Der Beweis zum Vierfarbensatz liefert auch einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V|^2)$, der planare Graphen mit höchstens vier Farben färbt. *Jedoch: Die Frage*

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?“

ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Satz ((Vierfarbensatz))

Für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.

Beweis.

siehe Appel und Haken 1977. $\square$

Bemerkung: Der Beweis zum Vierfarbensatz liefert auch einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V|^2)$, der planare Graphen mit höchstens vier Farben färbt. *Jedoch: Die Frage*

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?“

ist $\mathcal{NP}$-vollständig.