

Verschieben von Folgliedern

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$$

$$0, 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$$

m -mal

$$\approx a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots = x^m \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq m} a_{n-m} x^n$$

Also:

Rechts-Verschieben um m Stellen

\approx Multiplikation mit x^m

Beisp: Von $\bullet 1, 1, 1, \dots, 1$, ziehe man

ab $\bullet \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m\text{-mal}}, 1, 1, 1, \dots$

Ergebnis: $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m\text{-mal}}, 0, 0, \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{m-1} x^n} = \sum_{n \geq 0} x^n - \underbrace{x^m \sum_{n \geq 0} x^n}_{\text{rot}} = \boxed{(1-x^m) \cdot \sum_{n \geq 0} x^n}$$

Links-Verschieben: $\frac{1}{x^m} \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \right)$

Beisp. für Anwendung von Potenzreihen (George Pólya 1887 - 1985)

Aufgabe: n Cent in 1-, 5- und 10-Cent-Münzen zu wechseln. Auf wieviele Weisen ist das möglich?

Lösungsansatz: Suche Potenzreihe $\sum w_n x^n$,
daß w_n die Anzahl der Wechselmöglichkeiten ist

Annahme: Beliebige viele Münzen jeder Sorte vorhanden; Münzen einer Sorte ununterscheidbar.

(1) Potenzreihe für Wechseln in 1-Cent-Münzen:
jeweils 1 Möglichkeit: $A(x) := \sum_{n \geq 0} 1 \cdot x^n$

(2) Potenzreihe für Wechseln in 5-Cent-Münzen:
Nur für $5|m$ möglich: $B(x) := 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + \dots$

$$B(x) := \sum_{i \geq 0} x^{5i}$$

Analog Wechseln in 10-Cent. $C(x) := \sum_{j \geq 0} x^{10j}$

(3) Spezialfall:

Wechseln von n Cent in 1- und 5-Cent-Münzen:

k 1-Cent-M. ($0 \leq k \leq n$), $n-k$ 5-Cent-M.
 a_k Möglichkeiten, b_{n-k} Möglichkeiten

Insgesamt $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ für festes n

Also n Cent in 1- oder 5-Cent-M. : $[x^n] A(x) \cdot B(x)$

(4) n Cent \leadsto 1-C., 5-C., 10-C.-M. ;

$(A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x)$ analog zu (3).
= (vgl. Tabelle)

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} = \sum_{n \geq 0} w_n x^n.$$

mit Computeralgebra in Potenzreihe umformen.

Lösen von Rekursionsgleichungen.

Beisp: $a_n = a_{n-1} + 1, n \geq 1, a_0 = 1$

Erzeugende Funktion: $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n =$

$$= a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_{n-1} + 1) x^n = 1 + x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} x^n$$

$$= x \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 1 + \sum_{n \geq 1} x^n = x \cdot A(x) + \frac{1}{1-x} \leadsto$$

$A(x)$ geometr. R.

$$A(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$$

Koeffizientenvergleich: $a_n = n+1$ für $n \geq 1$.

Rekursionsgleichungen

Lineare Rek.-Gl.

$$(1) \quad x_m = a x_{m-1}, \quad x_0 = b_0 : x_m = b_0 a^m$$

$$(2) \quad x_m = a x_{m-1} + b_1, \quad x_0 = b_0$$

$$x_m = \begin{cases} b_0 a^m + b_1 \cdot (a^m - 1) / (a - 1), & a \neq 1 \\ b_0 + m \cdot b_1 & a = 1 \end{cases}$$

$$(3) \text{ Satz: } x_m = a_1 x_{m-1} + a_2 x_{m-2}, \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0) \\ m \geq 2 \\ x_1 = b_1, \quad x_0 = b_0$$

α, β reelle Lösungen von $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$

$$A := \begin{cases} \frac{b_1 - b_0 \beta}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \\ \frac{b_1 - \alpha b_0}{\alpha}, & \alpha = \beta \neq 0 \end{cases} \quad B := \begin{cases} \frac{b_1 - b_0 \alpha}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \\ b_0, & \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$x_n = \begin{cases} A \alpha^n - B \beta^n, & \alpha \neq \beta \\ (A n + B) \alpha^n, & \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}$$

Bew.: Sonderfall $\alpha = \beta$: entweder $a_2 = 0$

oder $\alpha = \beta = \frac{a_1}{2} = \sqrt{-a_2}, \quad a_2 < 0.$

Bew. mit vollst. Ind über m .

Lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung

(*) $x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} + b_n, n \geq k$
mit Anfangsbedingungen $x_i = b_i, i=0, \dots, k-1$.

Wenn $b_k = 0$ so heißt (*) homogen, andernfalls inhomogen

Satz: Sei $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$ für $n \geq 2$
mit $x_1 = b_1$ und $x_0 = b_0$ eine lineare
homogene Rekursionsgleichung mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$

Seien ferner α, β zwei reelle Lösungen der Gleichung
 $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$ sowie

$$A := \begin{cases} \frac{b_1 - b_0 \beta}{\alpha - \beta} & \text{für } \alpha \neq \beta \\ \frac{b_1 - \alpha b_0}{\alpha} & \text{für } \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$B := \begin{cases} \frac{b_1 - b_0 \alpha}{\alpha - \beta} & \text{für } \alpha \neq \beta \\ b_0 & \text{für } \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$x_n = \begin{cases} A \alpha^n - B \beta^n & \text{für } \alpha \neq \beta \\ (A n + B) \alpha^n & \text{für } \alpha = \beta \end{cases}$$

Beweis wie im Fall ersten Grades: Nachrechnen
per Induktion!

Beisp: Anzahl der Wörter ohne 00 in $\{0, 1\}^*$.
 $a_1 = 2, a_2 = 3, n \geq 3: a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Aufgabe: 14 Stühle stehen in einer Reihe. Auf wieviele verschiedene Arten können sich Personen so darauf setzen, dass zwischen je zwei Personen mindestens ein leerer Stuhl ist?

Lösung:

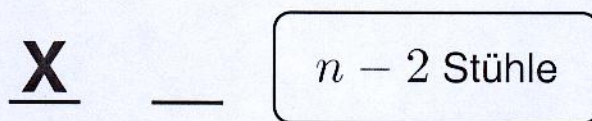
Es sei $f(n) :=$ Anzahl Möglichkeiten für n Stühle.

Klar: $f(1) = 2$ (keine Person oder eine Person) und
 $f(2) = 3$ (keine Person oder eine Person auf einem der beiden Stühle)

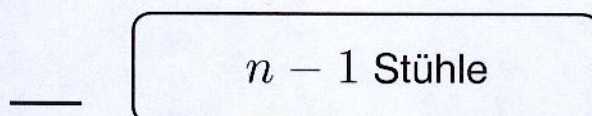
IDEA: Stelle eine Rekursionsgleichung auf!

Betrachte den Stuhl ganz links. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

1.) Dort sitzt eine Person. Dann muss der Stuhl daneben leer sein. D.h., die Möglichkeiten hierfür entsprechen den Anzahl Möglichkeiten für $n - 2$ Stühle:



2.) Dort sitzt keine Person. Die Möglichkeiten hierfür entsprechen dann den Anzahl Möglichkeiten für $n - 1$ Stühle:



Es gilt also: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für alle $n \geq 3$ und $f(1) = 2, f(2) = 3$.

VERWENDE MAPLE:

```
> f := unapply(rsolve({f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=2,  
f(2)=3}, f), n);
```

$$f := n \rightarrow \frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2-\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{1-\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2-\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}}$$

```
> evalf(f(14));
```

986.99999945

Die gesuchte Antwort lautet also 987.