
Diskrete Strukturen I

1. Beweisübungen

- Ist die Aussage "Ein 8×8 Schachbrett, bei dem die linke obere und rechte untere Ecke fehlen, kann man exakt mit Dominosteinen der Größe 2×1 bedecken." richtig oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort!
- Was ist falsch an folgendem Beweis? "*Behauptung:* Alle Blumen haben die gleiche Farbe. Beweis durch Induktion: *Induktionsanfang:* Eine einzige Blume hat die gleiche Farbe wie sie selbst. *Induktionsannahme:* Jede Menge von $n - 1$ Blumen ist einheitlicher Farbe. *Induktionsschluss:* Seien nun n Blumen gleicher Farbe gegeben. Dann haben nach der Induktionsannahme die Blumen $1 \dots (n - 1)$ die gleiche Farbe. Gleichzeitig haben die Blumen $2 \dots n$ die gleiche Farbe. Da aber die Blumen $2 \dots (n - 1)$ nicht die Farbe verändern, müssen Blume 1 und Blume n die gleiche Farbe besitzen."
- Beweisen oder widerlegen Sie: In jeder Gruppe von 10 Personen gibt es entweder 3, die sich gegenseitig kennen oder 4, die sich gegenseitig nicht kennen.

2. Mengenabbildungen

Gegeben drei beliebige Mengen M , N und P .

- Beweisen Sie: Ist $g \circ f$ bijektiv für zwei Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$, so ist f injektiv und g surjektiv.
- Für welche Mengen M ist jede Injektion $M \rightarrow M$ eine Bijektion?
- Sei $n := |N|$ und $m := |M|$. Zeigen Sie, dass für die Anzahl I der injektiven Abbildungen von M nach N gilt:

$$I = n^m = \prod_{i=1}^m (n - i + 1).$$

3. O-Notation

Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

- $2^{20} \cdot n^2 = O(n^2)$, b) $n(n + (-1)^n) = O(n^2)$, c) $\log n = o(n)$, d) $n = o(n \log n)$
e) $n \log n = o(n^{3/2})$, f) $4^{\log_4(\log_4 n)} = \Theta(\log_2 n)$, g) $4^{\log_2(\log_2 n)} = \Theta((\log_2 n)^2)$.

4. Stirlingsche Ungleichung

Benutzen Sie die Stirlingsche Ungleichung zur möglichst präzisen asymptotischen Abschätzung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

in O-Notation.