Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 2
20. April 2005

Algorithmische Algebra I

Abgabe: 27. April, in der Vorlesung, MI 00.04.011

Aufgabe 1
Seien $x_1, ..., x_r, a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

(a) $(x_1) + ... + (x_r) = (x_1, ..., x_r)$

(b) $(x_1) \cdot ... \cdot (x_r) = (x_1 \cdot ... \cdot x_r)$

(c) $\mathrm{ggT}(a, b) = 1 \Longleftrightarrow (a) + (b) = 1$

Aufgabe 2
Seien Seien $x_1, ..., x_r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

(a) $(x_1) \cap ... \cap (x_r) = (e)$, wobei $e = kgV(x_1, ..., x_r)$ gilt.

(b) Sind $x_1, ..., x_r$ paarweise teilerfremd, d.h. gilt $\mathrm{ggT}(x_i, x_j) = 1$ für alle $i \neq j$, so gilt:

$$(x_1) \cap ... \cap (x_r) = (x_1) \cdot ... \cdot (x_r)$$

(c) Gilt die Umkehrung von Aussage (b) ? (Begründung)

Aufgabe 3
Programmieren Sie in *CoCoA* zwei Funktionen $q = Polydiv(f, g)$ und $r = Polymod(f, g)$, die auf Eingabe zweier Polynome $f, g \in \mathbb{Q}, g \neq 0$, Polynome q und r zurückgeben, so dass $f = qg + r$ mit $deg(r) < deg(g)$ gilt.
(Bitte senden Sie die Source-Codes der Prozeduren per Email an `chibisov@in.tum.de`)

Aufgabe 4

(a) Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Q}[x]\backslash\{0\}$ Polynome und $d = \mathrm{ggT}(f_1, ..., f_r)$. Zeigen Sie:

$$V(f_1, ..., f_r) = \{z \in \mathbb{C} | f_1(z) = ... = f_r(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} | d(z) = 0\}$$

(b) Seien

$$f_1 = x^5 - 2\,x^4 + 4\,x^3 - 8\,x^2 + 4\,x - 8$$
$$f_2 = x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2$$
$$f_3 = x^4 + 10\,x^3 + 27\,x^2 + 20\,x + 50$$

Bestimmen Sie $V(f_1, f_2, f_3)$ ohne die Polynome f_1, f_2, f_3 zu faktorisieren !