
Algorithmische Algebra I

(Abgabe: Mittwoch, 1.06., in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $E \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ eine Menge von Polynomen. Zeigen Sie

$$E \text{ ist irredundant} \iff (\forall f \in E)(f \notin (E \setminus \{f\})).$$

Aufgabe 2

Sei $E \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ eine endliche Menge von Polynomen. Zeigen Sie

- (a) Wenn $\text{LT}(E)$ irredundant ist, so ist auch $\text{LM}(E)$ irredundant. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt.
- (b) Wenn $|\text{LT}(E)| = |\text{LM}(E)|$ und $\text{LM}(E)$ irredundant ist, so ist auch $\text{LT}(E)$ irredundant.
- (c) Eine Gröbner Basis G von $I \neq 0$ ist genau dann minimal, wenn $|\text{LM}(G)| = |G|$ und $\text{LM}(G)$ irredundant ist.

Aufgabe 3

Sei $I \neq 0$ ein Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$. Wir definieren

$$\mu_{\text{GB}}(I) := \min\{n \mid \text{es existiert eine Gröbner Basis } G \text{ von } I \text{ mit } n \text{ Elementen}\}.$$

Zeigen Sie, dass eine Gröbner Basis G von I genau dann minimal ist, wenn $|G| = \mu_{\text{GB}}(I)$.

Aufgabe 4

Benutzen Sie den Buchberger Algorithmus, um eine Gröbner Basis des Ideals

$$I = (3x^3y^4 - 2x^4 + xy^2, 2x^2y^3 + x^2y^2, 4x^3y + 2x^3)$$

zu bestimmen. Minimalisieren sie diese anschließend. Schreiben Sie jeden Schritt des Algorithmus explizit auf.