SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.
2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.
2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Beobachtung:

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn $= 0$.

Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Beobachtung:

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn $= 0$.

Dennoch sind die „Schwankungen" im ersten Fall geringer als im zweiten.

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X-\mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X-\mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X-\mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X-\mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition: Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot \Pr[X = x]\,.$$

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition: Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x] .$$

Die Größe $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heißt Standardabweichung von X.

Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \,.$$

Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2]$$

Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \,.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2 \end{aligned}$$

Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.\end{aligned}$$

q. e. d.

Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

   Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1\,.$$

Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

   Es ist

   $$\mu = 0 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1\,.$$

2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

   Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1\,.$$

2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

   Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{5}{6} \cdot (-1)^2 = 5\,.$$

Satz 12: Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]\,.$$

Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X+b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\mathrm{Var}[X+b] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X+b])^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}[X]\,.$$

Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X+b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\mathrm{Var}[X+b] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X+b])^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}[X]\,.$$

Weiter folgt mit Satz 11:

$$\mathrm{Var}[a\cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] - (a\mathbb{E}[X])^2 = a^2\cdot\mathrm{Var}[X]\,,$$

Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X+b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\mathrm{Var}[X+b] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X+b])^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}[X]\,.$$

Weiter folgt mit Satz 11:

$$\mathrm{Var}[a\cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] - (a\mathbb{E}[X])^2 = a^2\cdot\mathrm{Var}[X]\,,$$

und daraus zusammen die Behauptung. *q. e. d.*

Der Erwartungswert und die Varianz gehören zu den so genannten Momenten einer Zufallsvariablen:

Definition: Für eine Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das k-te Moment und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k-te zentrale Moment.

Der Erwartungswert ist also identisch zum ersten Moment, während die Varianz dem zweiten zentralen Moment entspricht.

1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?

1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?

Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art

$$\Pr[X = x, Y = y] \;=\; \Pr[\{\omega;\; X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}]\,.$$

Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x}\binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$

Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x}\binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}} .$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x}\binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

hypergeometrisch verteilt.

Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \le x \le 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x}\binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}\,.$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x}\binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

hypergeometrisch verteilt.

Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem r Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit $a + b$ mit b besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.

Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.

Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x}\binom{28}{10-x}\binom{4-x}{y}\binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10}\binom{22}{2}}.$$

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.

Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x}\binom{28}{10-x}\binom{4-x}{y}\binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10}\binom{22}{2}}.$$

Bemerkung:

Die Schreibweise $\Pr[X = x, Y = y]$ stellt eine Abkürzung von $\Pr[„X = x \wedge Y = y“]$ dar. Ein anderes Beispiel ist

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y_1, \sqrt{Y} = y_2].$$

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y.

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y.

Aus der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x,y)\,.$$

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y.

Aus der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x,y)\,.$$

Die Funktionen f_X und f_Y nennt man Randdichten.

Die Ereignisse „$Y = y$“ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x)\,.$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Die Ereignisse „$Y = y$“ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x)\,.$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Für zwei Zufallsvariablen definiert man die gemeinsame Verteilung

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \Pr[X \le x, Y \le y] = \Pr[\{\omega;\ X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\}] \\ &= \sum_{x' \le x} \sum_{y' \le y} f_{X,Y}(x', y')\,. \end{aligned}$$

Die Randverteilung ergibt sich gemäß

$$F_X(x) = \sum_{x' \le x} f_X(x') = \sum_{x' \le x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y)$$

sowie

$$F_Y(y) = \sum_{y' \le y} f_Y(y') = \sum_{y' \le y} \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y') \,.$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]\,.$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n] \,.$$

Alternativ:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) \,.$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n] \,.$$

Alternativ:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) \,.$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten.

Ebenso gilt

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n) \,.$$

Satz 13:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_1, \ldots, S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$“, ..., „$X_n \in S_n$“ unabhängig.

Satz 13:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_1, \ldots, S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$“, . . . , „$X_n \in S_n$“ unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} &\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\ &\quad = \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \end{aligned}$$

Satz 13:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_1, \ldots, S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$", ..., „$X_n \in S_n$" unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\
&\quad = \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&\quad \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]
\end{aligned}$$

Satz 13:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_1, \ldots, S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$", ..., „$X_n \in S_n$" unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\
&\quad = \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&\quad \overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n] \\
&\quad = \left(\sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right)
\end{aligned}$$

Satz 13:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $S_1, \ldots, S_n$ beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „$X_1 \in S_1$", …, „$X_n \in S_n$" unabhängig.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\
&= \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \ldots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n] \\
&= \left(\sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right) \\
&= \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n] .
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Satz 14:

$f_1, \ldots, f_n$ seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

Satz 14:

$f_1, \ldots, f_n$ seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $S_i = \{x;\ f(x) = z_i\}$.

Satz 14:

$f_1, \ldots, f_n$ seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $S_i = \{x;\ f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \ldots, f_n(X_n) = z_n] \\ = \quad & \Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \end{aligned}$$

Satz 14:

$f_1, \ldots, f_n$ seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $S_i = \{x;\ f(x) = z_i\}$.

$$
\begin{aligned}
&\Pr[f_1(X_1) = z_1, \ldots, f_n(X_n) = z_n] \\
&\quad = \quad \Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\
&\quad \overset{\text{Unabh.}}{=} \quad \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n]
\end{aligned}
$$

Satz 14:

$f_1, \ldots, f_n$ seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $S_i = \{x;\ f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned}
&\Pr[f_1(X_1) = z_1, \ldots, f_n(X_n) = z_n] \\
&\quad = \quad \Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] \\
&\quad \overset{\text{Unabh.}}{=} \quad \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \\
&\quad = \quad \Pr[f_1(X_1) = z_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[f_n(X_n) = z_n]\,.
\end{aligned}$$

q. e. d.

Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel: Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei $Z := X + Y$ die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel: Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei $Z := X + Y$ die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für Z gilt z.B.:

$\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0$,

$\Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1,3),(2,2),(3,1)\}] = \frac{3}{36}$.

Für die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

Satz 15:

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$. Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\,.$$

Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$f_Z(z) \;=\; \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x]$$

Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \end{aligned}$$

Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\,. \end{aligned}$$

q. e. d.

Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\
&= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\
&= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\,.
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Den Ausdruck $\sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$ aus Satz 15 nennt man in Analogie zu den entsprechenden Begriffen bei Potenzreihen auch Faltung oder Konvolution der Dichten f_X und f_Y.

Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1,z-6\}}^{\min\{6,z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1,z-6\}}^{\min\{6,z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für $2 \leq z \leq 7$ erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$

Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1,z-6\}}^{\min\{6,z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für $2 \le z \le 7$ erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}\,.$$

Und für $7 < z \le 12$:

$$\Pr[Z = z] = \frac{13-z}{36}\,.$$

Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n]\,.$$

Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n]\,.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{\omega\in\Omega}(a_1 \cdot X_1(\omega) + \ldots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega]$$

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] \,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \ldots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\
&= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \ldots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right)
\end{aligned}$$

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \ldots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\
&= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \ldots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\
&= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n]\,.
\end{aligned}$$

q. e. d.

Beispiel: n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Beispiel: n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen X, die als Summe der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $X := X_1 + \ldots + X_n$.

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] \; + \; 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] \; + \; 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1\,.$$

Im Mittel hat also nur ein Seemann sein eigenes Bett aufgesucht.

Satz 17: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Satz 17: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n] \,.$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] \quad = \quad \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y]$$

Satz 17: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n] \,.$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \end{aligned}$$

Satz 17: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y]
\end{aligned}$$

Satz 17: (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\
&= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]\,.
\end{aligned}$$

q. e. d.

Dass für die Gültigkeit von Satz 17 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wirklich notwendig ist, sieht man beispielsweise am Fall $Y = -X$ für eine Zufallsvariable mit einer von Null verschiedenen Varianz. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = -\mathbb{E}[X^2] \neq -(\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \,.$$