

SS 2004

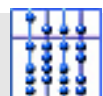
Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

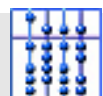
<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>



Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.



Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.
2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.



Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.
2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Beobachtung:

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn = 0.



Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.
2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Beobachtung:

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn = 0.

Dennoch sind die „Schwankungen“ im ersten Fall geringer als im zweiten.



Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.



Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition: Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die Varianz $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \text{Pr}[X = x].$$

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition: Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die Varianz $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \text{Pr}[X = x].$$

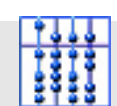
Die Größe $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X]}$ heißt Standardabweichung von X .



Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$



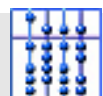
Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2]$$



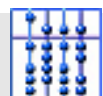
Satz 11:

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2\end{aligned}$$



Satz 11:

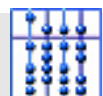
Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis: Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

q. e. d.



Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.



Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$



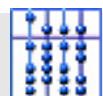
Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$

2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.



Beispiel:

1. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei gerader Augenzahl erhalten wir 1€, bei ungerader Augenzahl müssen wir 1€ bezahlen.

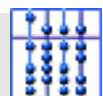
Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$

2. Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5€, ansonsten müssen wir 1€ bezahlen.

Es ist

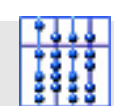
$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{5}{6} \cdot (-1)^2 = 5.$$



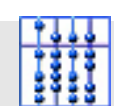
Satz 12:

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X].$$



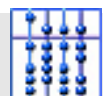
Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.



Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\text{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X].$$



Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\text{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X].$$

Weiter folgt mit Satz 11:

$$\text{Var}[a \cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2 \mathbb{E}[X^2] - (a \mathbb{E}[X])^2 = a^2 \cdot \text{Var}[X],$$



Beweis: Aus der in Satz 8 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

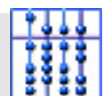
$$\text{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X].$$

Weiter folgt mit Satz 11:

$$\text{Var}[a \cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2 \mathbb{E}[X^2] - (a \mathbb{E}[X])^2 = a^2 \cdot \text{Var}[X],$$

und daraus zusammen die Behauptung.

q. e. d.



Der Erwartungswert und die Varianz gehören zu den so genannten Momenten einer Zufallsvariablen:

Definition: Für eine Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das k -te Moment und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k -te zentrale Moment.

Der Erwartungswert ist also identisch zum ersten Moment, während die Varianz dem zweiten zentralen Moment entspricht.



1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.



1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?



1.4.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel: Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?

Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art

$$\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$



Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$



Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

hypergeometrisch verteilt.



Beispiel: (Forts.) Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

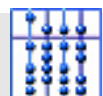
$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

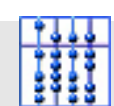
$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

hypergeometrisch verteilt.

Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem r Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit $a + b$ mit b besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.



Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.



Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$. Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$. Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x} \binom{4-x}{y} \binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10} \binom{22}{2}}.$$

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$. Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

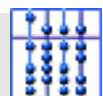
und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x} \binom{4-x}{y} \binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10} \binom{22}{2}}.$$

Bemerkung:

Die Schreibweise $\Pr[X = x, Y = y]$ stellt eine Abkürzung von $\Pr[„X = x \wedge Y = y“]$ dar. Ein anderes Beispiel ist

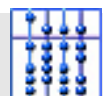
$$\Pr[X \leq x, Y \leq y_1, \sqrt{Y} = y_2].$$



Die Funktion

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y .



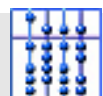
Die Funktion

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y .

Aus der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y).$$



Die Funktion

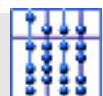
$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y .

Aus der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y).$$

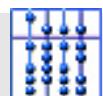
Die Funktionen f_X und f_Y nennt man Randdichten.



Die Ereignisse „ $Y = y$ “ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x).$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.



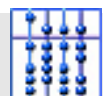
Die Ereignisse „ $Y = y$ “ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x).$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Für zwei Zufallsvariablen definiert man die gemeinsame Verteilung

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}] \\ &= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y'). \end{aligned}$$

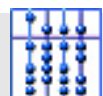


Die Randverteilung ergibt sich gemäß

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y)$$

sowie

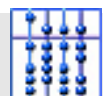
$$F_Y(y) = \sum_{y' \leq y} f_Y(y') = \sum_{y' \leq y} \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y').$$



Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$



Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten.



Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

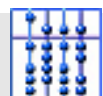
Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten.

Ebenso gilt

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$



Satz 13:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, \dots , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.



Satz 13:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, \dots , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} & \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \end{aligned}$$



Satz 13:

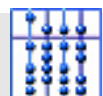
Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, \dots , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n]$$

$$= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]$$



Satz 13:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, \dots , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n]$$

$$= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]$$

$$= \left(\sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right)$$

Satz 13:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, \dots , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n]$$

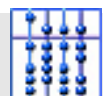
$$= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]$$

$$= \left(\sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right)$$

$$= \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n].$$

q. e. d.



Satz 14:

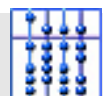
f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.



Satz 14:

f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$.



Satz 14:

f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned} \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ = \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \end{aligned}$$



Satz 14:

f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ &= \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \end{aligned}$$

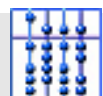
Satz 14:

f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis: Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ &= \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \\ &= \Pr[f_1(X_1) = z_1] \cdot \dots \cdot \Pr[f_n(X_n) = z_n]. \end{aligned}$$

q. e. d.



Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel: Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei $Z := X + Y$ die Summe der gewürfelten Augenzahlen.



Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel: Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei $Z := X + Y$ die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für Z gilt z.B.:

$$\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0,$$

$$\Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}] = \frac{3}{36}.$$



Für die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

Satz 15:

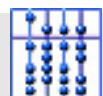
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$.
Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$



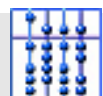
Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$f_Z(z) = \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x]$$



Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

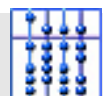
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \end{aligned}$$



Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x). \end{aligned}$$

q. e. d.

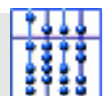


Beweis: Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x). \end{aligned}$$

q. e. d.

Den Ausdruck $\sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$ aus Satz 15 nennt man in Analogie zu den entsprechenden Begriffen bei Potenzreihen auch Faltung oder Konvolution der Dichten f_X und f_Y .



Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

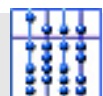


Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für $2 \leq z \leq 7$ erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$



Beispiel: (Forts.) Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für $2 \leq z \leq 7$ erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$

Und für $7 < z \leq 12$:

$$\Pr[Z = z] = \frac{13 - z}{36}.$$

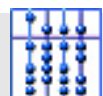


Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n].$$



Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

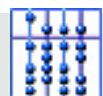
Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega]$$



Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \end{aligned}$$

Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 16: (Linearität des Erwartungswerts)

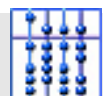
Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

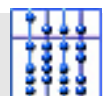
Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\ &= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n]. \end{aligned}$$

q. e. d.



Beispiel: n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?



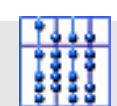
Beispiel: n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen X , die als Summe der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $X := X_1 + \dots + X_n$.

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.



Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

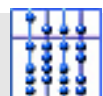
Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Im Mittel hat also nur ein Seemann sein eigenes Bett aufgesucht.



Satz 17: (Multiplikatitivität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$



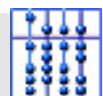
Satz 17: (Multiplikatitivität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y]$$



Satz 17: (Multiplikatitivität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y]$$

$$\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y]$$

Satz 17: (Multiplikatitivität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \end{aligned}$$

Satz 17: (Multiplikatitivität des Erwartungswerts)

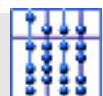
Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

q. e. d.



Dass für die Gültigkeit von Satz 17 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wirklich notwendig ist, sieht man beispielsweise am Fall $Y = -X$ für eine Zufallsvariable mit einer von Null verschiedenen Varianz. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = -\mathbb{E}[X^2] \neq -(\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

