

SS 2004

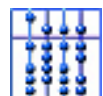
Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>



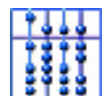
Satz 36: (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall „ $a > 0$ “:

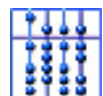
$$\begin{aligned}\Pr[Y \leq y] &= \Pr[aX + b \leq y] = \Pr\left[X \leq \frac{y - b}{a}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) du.\end{aligned}$$

Nach der Substitution $u = (v - b)/a$ und $du = (1/a) \cdot dv$ erhalten wir



$$\Pr[Y \leq y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) dv.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog.
q. e. d.



Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable X und $Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Dann ist nach Satz 36 Y $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \Pr[a < X \leq b] &= \Pr\left[\frac{a - \mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



Satz 37:

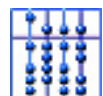
X sei $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = 1.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Da der Integrand punktsymmetrisch zu $(0, 0)$ ist, folgt $\mathbb{E}[X] = 0$.



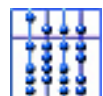
Mittels Lemma 35 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \underbrace{x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = 1$ ist und somit

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1.$$

q. e. d.



Satz 38:

X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \text{ und } \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

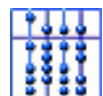
Beweis: $Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu$$

und

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \cdot \text{Var}[Y] = \sigma^2.$$

q. e. d.



2.2.3 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zur geometrischen Verteilung. Wie die geometrische Verteilung ist sie „gedächtnislos“ ist. Sie spielt daher vor allem bei der Modellierung von Wartezeiten eine große Rolle.



Definition: Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ , wenn sie die Dichte

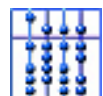
$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Für die entsprechende Verteilungsfunktion gilt (für $x \geq 0$)

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Für $x < 0$ gilt selbstverständlich $F(x) = 0$.



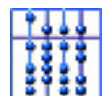
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[t \cdot (-e^{-\lambda t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

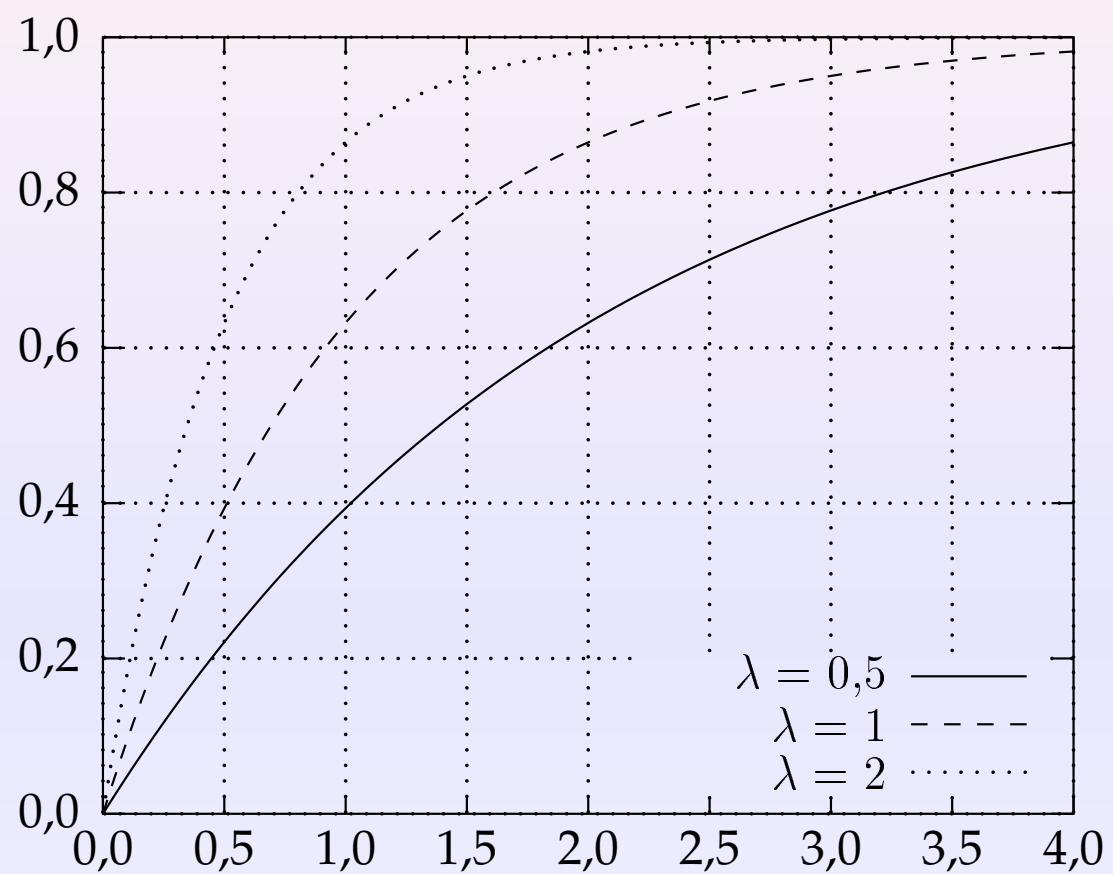
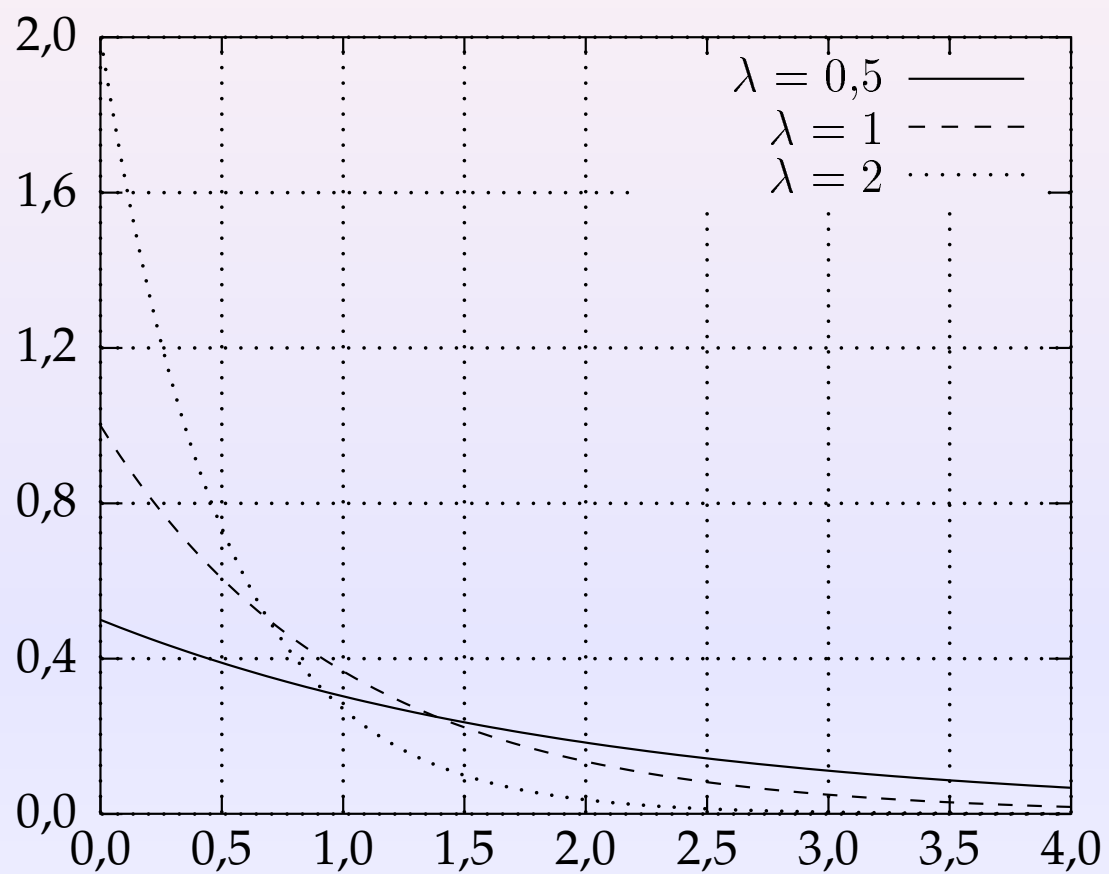
Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[t^2 \cdot (-e^{-\lambda t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-\lambda t} dt \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$





Dichte und Verteilung der Exponentialverteilung

Eigenschaften der Exponentialverteilung

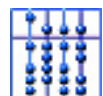
Satz 39: (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ . Für $a > 0$ ist die Zufallsvariable $Y := aX$ wieder exponentialverteilt mit dem Parameter λ/a .

Beweis:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \Pr[Y \leq x] = \Pr[aX \leq x] \\ &= \Pr\left[X \leq \frac{x}{a}\right] = F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\lambda x}{a}}. \end{aligned}$$

q. e. d.



Gedächtnislosigkeit

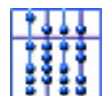
Satz 40: (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{R}^+ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]. \quad (*)$$

Beweis: Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]. \end{aligned}$$



Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung (*) erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$.

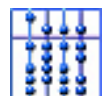
Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \Pr[X > x + y] \\ &= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.



Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$

q. e. d.



Beispiel:

Über das Cäsium-Isotop $^{134}_{55}\text{Cs}$ ist bekannt, dass es eine mittlere Lebensdauer von ungefähr 3,03 Jahren oder $1,55 \cdot 10^6$ Minuten besitzt. Die Zufallsvariable X messe die Lebenszeit eines bestimmten $^{134}_{55}\text{Cs}$ -Atoms. X ist exponentialverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{1,55 \cdot 10^6} \approx 0,645 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

Da λ den Kehrwert einer Zeit als Einheit besitzt, spricht man von der **Zerfallsrate**. Auch bei anderen Anwendungen ist es üblich, λ als **Rate** einzuführen.

