Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h. c. Wilfried Brauer

SS 2005
Übungsblatt 05
27. Mai 2005
Dr. Werner Meixner

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Eine positivwertige Zufallsvariable X heisst *gedächtnislos*, wenn

$$\Pr[X > s + t \mid X > t] = \Pr[X > s] \quad \forall s, t > 0$$

gilt. Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Aufgabe 2

Wir machen n Würfe mit einem Paar fairer Würfel. Zeigen Sie, dass für große n die Summe aller gewürfelten Augen mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $7n \pm 10\sqrt{35n/6}$ liegt.

Aufgabe 3

Seien $F(z)$ und $G(z)$ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen für zwei Zufallsvariablen.[1] Sei $H(z) = F(G(z))$.

a) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch H aus.

b) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch $\mathbb{E}(F)$, $\mathrm{Var}(F)$, $\mathbb{E}(G)$ und $\mathrm{Var}(G)$ aus.

Aufgabe 4

Seien $X_1, \dots, X_{2n}$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Pr\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{2n}}{2n} - \alpha\right| \leq \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \alpha\right|\right] \geq \frac{1}{2}$$

[1] Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich aus $\mathbb{N}_0$ ist die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s) = \sum_{k\geq 0} \Pr[X = k] \cdot s^k$.