

WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/index.html.de>

21. Oktober 2005

Kapitel 0 Organisatorisches

- Vorlesungen:
 - Di 8:30–10:00 (MW2001), Fr 8:30–10:00 (MW1801)
- Übung:
 - 2SWS Tutorübung: bitte anmelden unter <https://grundstudium.in.tum.de/>
- Umfang:
 - 4V+2TÜ, 8 ECTS-Punkte
- Sprechstunde:
 - Fr 11:00–12:00 oder nach Vereinbarung

- Übungsleitung:
 - Dr. W. Meixner, MI 03.09.040 (meixner@in.tum.de)
Sprechstunde: Fr 10:15–11:00 oder nach Vereinbarung
- Sekretariat:
 - Frau Schmidt, MI 03.09.052 (schmiann@in.tum.de)
- Webseite:

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/>

- Übungsaufgaben und Klausur:
 - Ausgabe jeweils am Freitag in der Vorlesung
 - Abgabe eine Woche später
 - Besprechung in der Tutorübung
- Klausur:
 - Zwischenklausur (50% Gewicht) am 10. Dezember 2005
 - Endklausur (50% Gewicht) am 11. Februar 2006
 - Wiederholungsklausur am ?? April 2006
 - bei den Klausuren sind *keine* Hilfsmittel außer einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt zugelassen
 - Zulassungsvoraussetzung (außer für Studierende im Diplomstudiengang Informatik) sind 40% der erreichbaren Hausaufgabenpunkte
 - vorauss. 12 Übungsblätter, das letzte am 27. Januar 2006, jedes 40 Punkte

1. Ziel der Vorlesung

Der Zweck dieser Vorlesung ist der Erwerb der Grundlagen

- beim Umgang mit logischen, algebraischen und algorithmischen Kalkülen,
- beim Lösen kombinatorischer Problemstellungen,
- bei der quantitativen Betrachtung der Effizienz von Lösungsmethoden und Algorithmen

2. Wesentliche Inhalte

- Wiederholung grundlegender Begriffe der Mengenlehre und der Aussagenlogik
- Algebraische Strukturen (elementare Grundlagen aus der Gruppen-, Ring- und Körpertheorie)
- Kombinatorik (elementare Zählmethoden und kombinatorische Identitäten)
- Graphen und Algorithmen (grundlegende Definitionen, elementare Algorithmen)

3. Literatur



Steger, Angelika:

Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra.

Springer, 2001



Gries, David und Schneider, Fred B.:

A Logical Approach to Discrete Math.

Springer, 1993



Aigner, Martin:

Diskrete Mathematik.

Vieweg, 1999 (3. Auflage)

-  Kreher, Donald L. und Stinson, Douglas R.:
Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search.
CRC Pressk, 1999
-  Rosen, Kenneth H.:
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 1995
-  Graham, Ronald L., Knuth, Donald E. und Patashnik, Oren:
Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.
Addison-Wesley, 1994
-  Pemmaraju, Sriram und Skiena, Steven:
Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica
Cambridge University Press, 2003

Kapitel I Einleitung, Grundlagen

1. Was sind Diskrete Strukturen?

Der relativ junge Begriff „Diskrete Strukturen“ oder auch „Diskrete Mathematik“ umfasst Kombinatorik, Graphentheorie, Optimierung, Algorithmik und einiges mehr. Das Gebiet beschäftigt sich mit **wohlunterschiedenen** Objekten.

Wohlunterschieden sind z. B. die Elemente der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen, jedoch nicht die Elemente der reellen Zahlen \mathbb{R} . Diskret bedeutet insbesondere, dass die betrachteten Mengen im Allgemeinen **endlich** oder **abzählbar unendlich** sind.

2. Zusammenwirken mit / Abgrenzung von anderen Bereichen

Letztlich werden fast alle Bereiche der Mathematik benutzt; andererseits hat die Diskrete Mathematik großen Einfluss auf zahlreiche Bereiche der Mathematik und Informatik. Gelegentlich werden jedoch andere als die gebräuchlichen methodischen Grundlagen benötigt, z. B. da die betrachteten Funktionen im Allgemeinen nicht stetig sind.

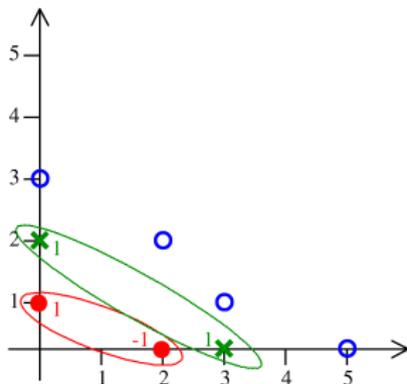
Beispiel 1

Polynome als Funktionen (mit Ableitung, Tangenten, ...) sind nicht unbedingt Stoff der Diskreten Mathematik; ein Beispiel für eine **diskrete Betrachtung** sind dagegen die sogenannten *Newton-Polytope*:

$$\begin{array}{ll} y - x^2: & y^2 + x^3: \\ +y \mapsto (1; 0; 1) & +y^2 \mapsto (1; 0; 2) \\ -x^2 \mapsto (-1; 2; 0) & +x^3 \mapsto (1; 3; 0) \end{array}$$

Die Monome über $\{x, y\}$ werden also als (Faktor; x -Potenz; y -Potenz) dargestellt.

Beispiel 2



Die blauen Kreise entstehen durch Vektoraddition der grünen Kreuze und der roten Punkte und stellen die Polytope des Produkts

$$(y - x^2)(y^2 + x^3) = y^3 + yx^3 - y^2x^2 - x^5$$

dar (Minkowski-Addition).

3. Komplexität: Ein warnendes Beispiel

$$(k+2) \cdot \left(\begin{aligned} &1 - (wz + h + j - q)^2 \\ &- \left((gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z \right)^2 \\ &- \left(2n + p + q + z - e \right)^2 \\ &- \left(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2 \right)^2 \\ &- \left(e^3(e+2)(a+1)^2 + 1 - o^2 \right)^2 \\ &- \left((a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2 \right)^2 \\ &- \left(16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2 \right)^2 \\ &- \left(n + l + v - y \right)^2 \\ &- \left(\left((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1 \right) \left(n + 4dy \right)^2 + 1 - (x + cu)^2 \right)^2 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left((a^2 - 1)l^2 + 1 - m^2 \right)^2 \\
& - \left(q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x \right)^2 \\
& - \left(z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm \right)^2 \\
& - \left(ai + k + 1 - l - i \right)^2 \\
& - \left(p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m \right)^2 \Big)
\end{aligned}$$

Die positiven Werte, die dieses Polynom mit $(a, \dots, z) \in \mathbb{N}_0^{26}$ annimmt, sind genau alle Primzahlen.

Deshalb empfiehlt sich oft die Verwendung eines symbolischen Mathematikprogramms, z. B. Maple.

4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
\emptyset	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- \mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen
- \mathbb{Q} = Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- \mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen
- \mathbb{C} = Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^n A_i$ Vereinigung der Mengen A_0, A_1, \dots, A_n
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $P(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M