

WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/index.html.de>

25. Oktober 2005

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$P(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ \{a, b, c, d\} \\ \}$$

Satz 5

Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:

Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. □

Bemerkungen:

- 1 Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
- 2 Die leere Menge ist in jeder Menge **als Teilmenge** enthalten.
- 3 $P(\emptyset)$ enthält **als Element** genau \emptyset (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

4.2 Relationen und Abbildungen

Seien A_1, A_2, \dots, A_n Mengen. Eine Relation über A_1, \dots, A_n ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb .

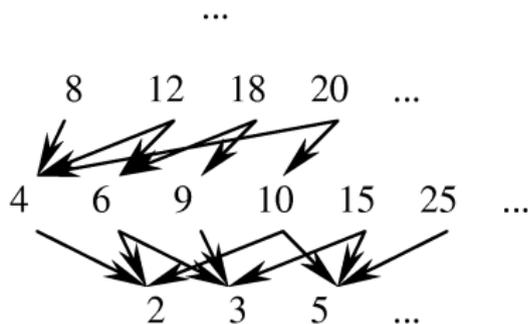
Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „ a teilt b “, $a, b \in \mathbb{N}$.

Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt **Hasse-Diagramm**:



Die Relation $|$ stellt eine *partielle Ordnung* dar.

Definition 7

Sei $R \subseteq A \times B$ eine **binäre** Relation. Dann heißt

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

das **Urbild** der Relation R und

$$\{b \in B; (\exists a \in A)[(a, b) \in R]\}$$

das **Bild** der Relation R .

Definition 8

Sei $R \subseteq A \times B$ eine **binäre** Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b, a); (a, b) \in R\}$$

die **inverse Relation** zu R .

Definition 9

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S]\}$$

das **Produkt** der Relationen R und S . Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10

Das Relationenprodukt \circ ist *assoziativ* und *distributiv über \cup und \cap* .

Beweis:

Hausaufgabe!



Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

- 1 $R^0 := \{(a, a); a \in A\}$ ($=: \text{Id}_A$)
- 2 $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v); k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die **Enkel**-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

- 1 Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
- 2 Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
- 3 Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m “ ist die Menge der Tupel (k', m') , so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

4.3 Funktionen

Sei $f : A \rightarrow B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $(f(a), a) \quad \forall a \in A$).

(Eine solche Relation heißt auch **rechtseindeutig** und **rechtstotal**.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
 - $f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}$
 - $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \leq 1 \right]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \geq 1 \right]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| = 1 \right]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B gleiche Kardinalität.

Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

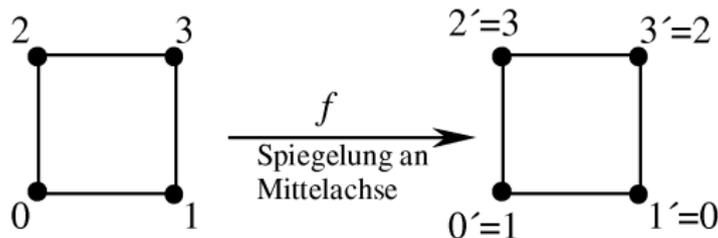
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Kanten eines Graphen

$$E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$



$$E' = f(E) = \{\{0', 1'\}, \{0', 2'\}, \{1', 3'\}, \{2', 3'\}\}$$

f ist ein Isomorphismus.

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
(„untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
(„obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$