

WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/index.html.de>

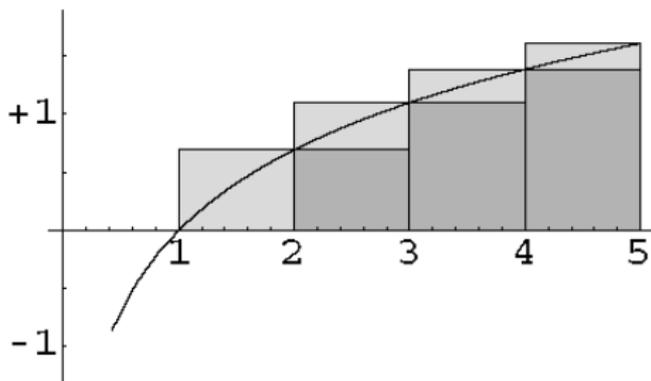
8. November 2005

Beispiel 38

Behauptung: $n! = O\left((n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$(\forall n > 0) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x \, dx < \sum_{k=2}^n \ln k < \int_1^{n+1} \ln x \, dx \right]$$



□

Es ist

$$\int_1^n \ln x \, dx = (x \cdot \ln x - x) \Big|_1^n = n \cdot \ln n - n + 1$$

und

$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n$$

Also:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n \cdot \ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1) \cdot \ln(n+1) - n \right]$$

und damit

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

oder:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

Die Stirling'sche Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n! / \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) = \sqrt{2\pi}$$

oder mit anderen Worten:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot (1 + o(1))$$

Beispiel 39 (Polynome)

Sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Behauptung: $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1: \quad |f(x)| &\leq \left| \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot x^i \\ &\leq x^n \cdot \left(\sum_{i=0}^n |a_i| x^{i-n} \right) \leq x^n \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^n |a_i|}_{=:c} \end{aligned}$$

□

Kapitel II Algebraische Grundlagen

1. Algebren

1.1 Grundbegriffe

Definition 40

Eine **Algebra** besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operationen auf S (der Operatorenmenge). Dabei gilt: Jeder Operator ist eine (totale) Abbildung

$$S^m \rightarrow S$$

der Stelligkeit (Arität, **arity**) $m \in \mathbb{N}_0$.

- Nullstellige Operatoren sind **Konstanten**, z. B. 0 , 47 , \perp .
- Einstellige Operatoren sind **unäre** Operatoren, z. B. $x \mapsto 2^x$,
 $x \mapsto \neg x$, $A \mapsto 2^A$.
- Zweistellige Operatoren sind **binäre** Operatoren, z. B.
 $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- Dreistellige Operatoren sind **ternäre** Operatoren, z. B.
 $(x, y, z) \mapsto \mathbf{if\ } x \mathbf{\ then\ } y \mathbf{\ else\ } z \mathbf{\ fi}$

Beispiel 41

Sei U eine Menge, F die Menge der Funktionen von $U \rightarrow U$.
 (F, \circ) ist eine Algebra mit \circ als **Komposition** von Funktionen.

Beispiel 42

Boolesche Algebra:

$\langle \{t, f\}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ ist eine (endliche) Algebra.

1.2 Eigenschaften

Signatur einer Algebra

Definition 43

Die **Signatur** einer Algebra besteht aus der Liste der Stelligkeiten der Operatoren.

Beispiel 44

$\langle \mathbb{B}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ (Boolesche Algebra, $\mathbb{B} = \{t, f\}$): 0, 0, 1, 2, 2

$$\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

Beispiel 45

$\langle 2^U, \{U, \emptyset, -, \cap, \cup\} \rangle$: 0, 0, 1, 2, 2

$$- : 2^U \rightarrow 2^U$$

$$\cap : 2^U \times 2^U \rightarrow 2^U$$

$$\cup : 2^U \times 2^U \rightarrow 2^U$$

Diese beiden Algebren haben dieselbe Signatur; die Trägermenge ist unwesentlich, es kommt nur auf die Reihenfolge der Stelligkeiten an.

Einselement, Nullelement, Inverses

Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra, \circ beliebiger zweistelliger Operator.

Definition 46

- Ein Element $1 \in S$ heißt **linkes** (bzw. **rechtes**) **Einselement** für den Operator \circ , falls

$$(\forall a \in S) \quad 1 \circ a = a \quad (\text{bzw. } a \circ 1 = a)$$

1 heißt **Einselement**, falls es linkes und rechtes Einselement ist.

- Ein Element $0 \in S$ heißt **linkes** (bzw. **rechtes**) **Nullelement** für den Operator \circ , falls

$$(\forall a \in S) \quad 0 \circ a = 0 \quad (\text{bzw. } a \circ 0 = 0)$$

0 heißt **Nullelement**, falls es linkes und rechtes Nullelement ist.

- Sei 1 Einselement. Für $a \in S$ heißt $a^{-1} \in S$ **Rechtsinverses** von a , falls

$$a \circ a^{-1} = 1$$

Analog: **Links inverses**

Beispiel 47

Betrachte $F(U)$, d. h. die Menge aller Abbildungen $U \rightarrow U$. Dann gilt (mit der Komposition als Operator):

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein **Rechtsinverses**, wenn f **surjektiv** ist.

$$f \circ f^{-1} = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g , so dass gilt: $g(x)$ wird von f auf x abgebildet.)

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein **Linksinverses**, wenn f **injektiv** ist.

$$f^{-1} \circ f = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g , so dass gilt: $f(x)$ wird von g auf x abgebildet.)

Ist f bijektiv, dann stimmen die beiden f^{-1} aus (1) und (2) überein.

Satz 48

Falls c linkes Einselement ist und d rechtes Einselement (bezüglich des binären Operator \circ), dann ist

$$c = d .$$

Beweis:

$$d = c \circ d = c .$$



Satz 49

Falls c linkes Nullelement und d rechtes Nullelement (bezüglich \circ) ist, dann ist

$$c = d .$$

Beweis:

$$c = c \circ d = d .$$



Beispiel 50

Betrachte $\langle \{b, c\}, \{\bullet\} \rangle$ mit

\bullet		b	c
b		b	b
c		c	c

Es gilt: b und c sind linke Nullelemente, und b und c sind rechte Einselemente.

Abgeschlossenheit

Definition 51

Sei $\langle S, \Phi \rangle$ eine Algebra, T eine Teilmenge von S .

- T ist unter den Operatoren in Φ **abgeschlossen (stabil)**, falls ihre Anwendung auf Elemente aus T wieder Elemente aus T ergibt.
- $\langle T, \Phi \rangle$ heißt **Unteralgebra** von $\langle S, \Phi \rangle$, falls $T \neq \emptyset$ und T unter den Operatoren $\in \Phi$ abgeschlossen ist.

Beispiel 52

- $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist **Unteralgebra** von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, \cdot \rangle$ ist **Unteralgebra** von $\langle \mathbb{N}_0, \cdot \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, + \rangle$ ist **keine Unteralgebra** von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, da sie nicht abgeschlossen ist ($1 + 1 = 2$).