

WS 2005/06

# Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/>

13. Dezember 2005

## 4. Die elementaren Zählfunktionen

### 4.1 Untermengen

#### Definition 162 (Binomialkoeffizienten)

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{n}{k} := 0 \quad n < k, n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{sonst} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

## Satz 163

Sei  $N$  eine Menge mit  $|N| = n$  Elementen. Die Menge aller  $k$ -elementigen Untermengen von  $N$  wird bezeichnet mit

$$\binom{N}{k}.$$

Es gilt:

$$\left| \binom{N}{k} \right| = \binom{|N|}{k} = \binom{n}{k}.$$

## Beweis:

Seien  $n, k \geq 0, a \in N$ .

①

$\binom{n}{0}$  und  $k > n$  sind klar.

② Definiere

$$S_a := \left\{ A \in \binom{N}{k}; a \in A \right\},$$
$$\tilde{S}_a := \left\{ A \in \binom{N}{k}; a \notin A \right\}.$$

3 Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, \quad S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left| \binom{N \setminus \{a\}}{k-1} \right| = \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{per Induktion})$$

$$|\tilde{S}_a| = \left| \binom{N \setminus \{a\}}{k} \right| = \binom{n-1}{k} \quad (\text{per Induktion})$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$



## Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)$$

## 4.2 Partitionen von Mengen und Zahlen

### 4.2.1 Ungeordnete Partitionen

#### 1. Mengenpartitionen

Sei  $N$  eine Menge der Kardinalität  $n$  und sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Eine Zerlegung von  $N$  in  $k$  nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen heißt eine  $k$ -Partition von  $N$ . Die einzelnen Teilmengen heißen auch **Klassen**. Ihre Anzahl wird mit

$$S_{n,k}$$

bezeichnet (die sog. **Stirling-Zahlen der 2. Art**).

## Beispiel 164

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, k = 2$$

$$\begin{array}{l} \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\} \\ \{2\} \cup \{1, 3, 4, 5\} \\ \{3\} \cup \{1, 2, 4, 5\} \\ \{4\} \cup \{1, 2, 3, 5\} \\ \{5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \\ \{1, 3\} \cup \{2, 4, 5\} \\ \{1, 4\} \cup \{2, 3, 5\} \\ \{1, 5\} \cup \{2, 3, 4\} \\ \{2, 3\} \cup \{1, 4, 5\} \\ \{2, 4\} \cup \{1, 3, 5\} \\ \{2, 5\} \cup \{1, 3, 4\} \\ \{3, 4\} \cup \{1, 2, 5\} \\ \{3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} \\ \{4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$$

Weiter gilt:  $S_{n,1} = 1, S_{n,2} = \text{Übung}, S_{n,n} = 1.$

## 2. Zahlpartitionen

Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

mit  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  und  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ .

Eine solche Zerlegung heißt ***k*-Partition** der Zahl  $n$ .

Die Anzahl aller *k*-Partitionen von  $n \in \mathbb{N}$  wird mit

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

## Beispiel 165

$$n = 8, k = 4.$$

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1$$

$$= 4 + 2 + 1 + 1$$

$$= 3 + 3 + 1 + 1$$

$$= 3 + 2 + 2 + 1$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow P_{8,4} = 5$$

## 4.2.2 Geordnete Partitionen

### 1. Mengenpartitionen

Seien  $N, n, k$  wie vorher. Eine (beliebig) *geordnete*  $k$ -Menge  $\subseteq N$  heißt  $k$ -Permutation aus  $N$ . Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = n^{\overline{k}}$$

(„ $n$  hoch  $k$  fallend“, „fallende Fakultät“).

Analog:

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n + 1) \cdots (n + k - 1)$$

Überlegung: Jede  $k$ -Menge aus  $N$  ergibt  $k!$   $k$ -Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine  $k$ -Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete  $k$ -Mengenpartitionen (Die Klassen sind (beliebig) *untereinander* geordnet, aber nicht *in sich*!).



## 4.3 Multimengen

### Beispiel 166

$$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \quad |M| = 7$$

### Satz 167

Die Anzahl der  $k$ -Multimengen (also Multimengen der Kardinalität  $k$ ) aus  $N$  ( $|N| = n$ ) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}.$$

## Beweis:

Sei o.B.d.A.  $N = \{1, \dots, n\}$ . Betrachte eine Multimenge  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  der Kardinalität  $k$ . Sei o.B.d.A.  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ . Definiere die Ersetzung  $f$ :

$$f : \begin{array}{ccc} a_1 & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & a_2 + 1 & \\ a_3 & a_3 + 2 & \\ \vdots & \vdots & \\ a_k & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter  $f$  ist eine Menge  $\subseteq [n + k - 1]$ . Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt  $\binom{n+k-1}{k}$ , und die durch  $f$  gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv.  $\square$

## Andere Beweisvariante:

### Beweis:

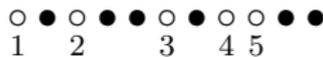
$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & & 0 & 2 & & & & & 1 & & 0 \\ \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \dots & \circ & \bullet & \circ \\ 1 & 2 & & 3 & 4 & & & & & n-1 & & n \end{array}$$

Von  $n + k$  Kugeln werden  $k$  schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben  $n$  weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus  $n$  weißen Kugeln  $k$  ausgewählt (mit Wiederholung).  $\square$

## Beispiel 168

Darstellung zu obigem Beispiel:



Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5\}$$

## 4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von  $N$  (Urbildraum) nach  $R$  (Bildraum),  
 $|N| = n, |R| = r$  mit  $n, r \in \mathbb{N}_0$ .

Die Anzahl beliebiger Abbildungen  $N \rightarrow R$  ist

$$r^n .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen  $N \rightarrow R$  ist

$$r^{\underline{n}} .$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen  $N \rightarrow R$  („geordnete  
 $r$ -Mengenpartitionen von  $N$ “) ist

$$r! \cdot S_{n,r} .$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen  $N \rightarrow R$  ist

$$\begin{aligned} &= r^n = \sum_{A \subseteq R} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \left( \binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^r S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} . \end{aligned}$$

## 4.5 Zusammenfassende Darstellung

$N$  seien  $n$  Tennisbälle,  $R$  seien  $r$  Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ( $n = r$ )
$N$ unterscheidbar $R$ unterscheidbar	$r^n$	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
$N$ nicht unterscheidbar $R$ unterscheidbar	$\frac{r^{\bar{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$N$ unterscheidbar $R$ nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$N$ nicht unterscheidbar $R$ nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1