

WS 2005/06

# Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/>

13. Januar 2006

## Satz 217

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein **multiplikatives Inverses** genau dann, wenn  $a_0 \neq 0$ .

Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss  $A(z) \cdot B(z) = 1$  sein, also auch  $a_0 \cdot b_0 = 1$ , damit  $a_0 \neq 0$ . Daher muss  $b_0 = a_0^{-1}$  sein.

Seien induktiv  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n] \left( A(z) \cdot B(z) \right) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

(dabei bezeichnet  $[z^n](\dots)$  den Koeffizienten von  $z^n$  in  $(\dots)$ )  
folgende Formel:

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist  $b_n$  und damit per Induktion  $B(z)$  eindeutig bestimmt.  $\square$

## Beispiel 218

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt  $A(z) \cdot (1 - z) = 1$ , da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 + \dots) - (z + z^2 + z^3 + \dots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

## Satz 219

*Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:*

1

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

2

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1 + z}$$

3

$$\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1 - z^2}$$

4

$$\sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5

$$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6

$$\sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1+z)$$

## Beweis:

- 1 s. o.
- 2 Setze in (1)  $z \mapsto -z$ .
- 3 Setze in (1):  $z \mapsto z^2$ .
- 4 Der Fall  $a \in \mathbb{N}_0$  wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine  $a$  verweisen wir auf die *Analysis*.

5

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \\ &\stackrel{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$

- 6 Setze in (5)  $c := m - 1$ .



## Beispiel 220

Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n \geq m} a_{n-m} \cdot z^n .$$

## Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} &\stackrel{\text{Satz 219 (6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n \geq m} \binom{n}{n-m} z^n \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n . \end{aligned}$$

(\*) Das Gleichheitszeichen gilt, da für  $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

## 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

### Beispiel 221

$$a_0 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1$$

*lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung*

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

---

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

*lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung*

## Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende *charakteristische Polynom*:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die  $a_n$  hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ( $a_0 = 2, a_1 = 6$ ) ergibt sich  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 2$ . Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

## Beispiel (Forts.)

*Man zeigt auch allgemein, dass*

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad \text{folgende Bedingung erfüllt:}$$
$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

## Beispiel 222

Sei  $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$  und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

(also  $(a_i)_{i \geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots)$ ). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - i)(x + i).\end{aligned}$$

Setze nun  $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$ . Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann  $c_1 = 1$  und  $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$ , also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

## Satz 223

Sei  $(q_1, q_2, \dots, q_d)$  eine gegebene Folge,  $q_i \in \mathbb{C}$ ,  $d \geq 1$ ,  $q_d \neq 0$ . Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d$$

Das *reflektierte Polynom* dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1z^{d-1} + q_2z^{d-2} + \dots + q_d$$

(Bemerkung:  $q^R(z)$  ist das *charakteristische Polynom*). Seien  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$  die verschiedenen Nullstellen von  $q^R$ , sei  $d_i$  die Vielfachheit von  $\alpha_i$ . Damit ist

$$\sum_{i=1}^k d_i = d.$$

## Satz 223 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$ , mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 **Lineare Rekursion:** ( $d$  ist die *Ordnung* der Rekursion)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[ f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0 \right]$$

- 2 **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom  $p(z)$  vom Grad  $< d$ .

## Satz 223 (Forts.)

- ③ **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome  $g_i$ ,  $\deg(g_i) < d_i$  für  $i = 1, \dots, k$ , so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

- ④ **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome  $p_i$ ,  $\deg(p_i) < d_i$ , so dass*

$$(\forall n \geq 0) \left[ f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n \right]$$

## Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen  $V_i = V_j$ , genügt es daher,  $V_i \subseteq V_j$  zu zeigen.

- $V_1 = V_2$ : Sei  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_2$ . Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d) \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit  $\deg(p) \leq d - 1$ , also  $[z^{d+n}]p(z) = 0$  für alle  $n \geq 0$ .

Betrachte für  $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \dots + f_nq_d = 0.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_1,$$

also  $V_2 \subseteq V_1$ , und damit  $V_1 = V_2$ .

- $V_2 = V_3$ : Sei  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_3$ , also

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}.$$

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q\left(\frac{1}{z}\right),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) &= \left(q^R(z)\right)^R = \left(\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_i\right)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^k \left( g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j = d,$$

also  $V_3 \subseteq V_2$  und damit  $V_2 = V_3$ .

- $V_3 = V_4$ : Sei

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \quad \deg(g_i(z)) < d_i .$$

Aus Satz 219 (5) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot \alpha_i^n z^n .\end{aligned}$$

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$
$$= \sum_{n \geq 0} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1}}_{p_i(n)} \cdot \alpha_i^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n .$$

Es gilt, dass

$$\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1,$$

und damit ist auch  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$ , also  $V_3 = V_4$ . □