

WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

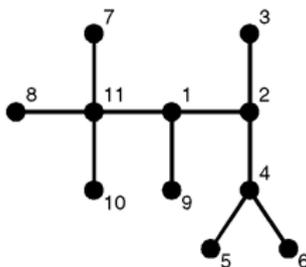
<http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/>

24. Januar 2006

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere (a_1, \dots, a_{n-2}) , $a_i \in \{1, \dots, n\}$ wie folgt:

```
for  $i = 1$  to  $n - 2$  do  
     $v_i :=$  Blatt mit minimalem Index  
     $a_i :=$  Index des Nachbarn von  $v_i$  in  $T$   
     $T := T \setminus \{v_i\}$   
od
```

Beispiel 275



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Sei (a_1, \dots, a_{n-2}) ein gegebener Prüfer-Code; sei f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in (a_1, \dots, a_{n-2}) . Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n (d(v_i) - 1) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i) \left[f_i = d(a_i) - 1 \right]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Umkehrabbildung: Gegeben (a_1, \dots, a_{n-2})

for $i=1$ to n do

$d(v_i) := f_i + 1$

od

$B := \emptyset; T := \emptyset$

for $i=1$ to $n-2$ do

$b := \min_{1 \leq j \leq n} \{j; j \notin \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}\} \cup B\}$

füge Kante (b, a_i) zu T hinzu

$B := B \cup \{b\}$

od

füge letzte Kante zu T gemäß der Gradbedingung hinzu

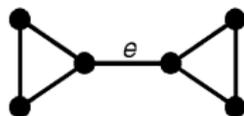


2.13 Brücken

Definition 276

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **Brücke**, falls $G' = (V, E \setminus \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G .

Beispiel 277

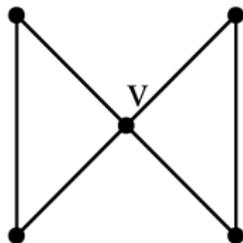


Beobachtung:

Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen einfachen Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)

Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 278

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$d(u, v) := k$$

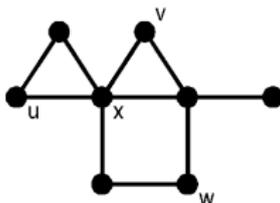
der **Abstand** von u und v in G .

Wir setzen $d(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$D(G) := \max\{d(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der **Durchmesser** des Graphen G .

Beispiel 279



$d(u, v) = 2$, $d(u, w) = 3$, $d(u, x) = 1$, $D(G) = 3$.

Beobachtung:

d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 280

Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Adjazenzmatrix** von G .

Beobachtungen:

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

Satz 281

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$\begin{aligned} A^0 &:= I, \\ A^{i+1} &:= A^i \cdot A \quad \text{für alle } i \geq 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n} :$$

$a_{i,j}^{(k)}$ ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j .

Beweis:

Induktion nach k :

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$

$a_{il}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l .

Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj} = a_{ij}^{(k+1)}$$



Bemerkung:

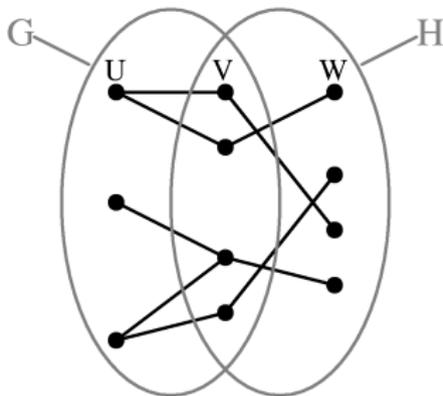
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ ein bipartiter Graph. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G .

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V) [\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das **boolesche** Produkt $A_G \cdot A_H$.

Definition 282

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als 0, 1-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^k a_{i,l} \wedge b_{l,j} \quad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

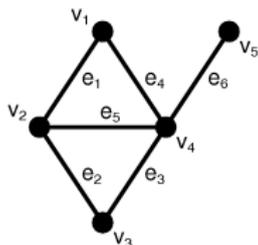
Definition 283

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.
Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Inzidenzmatrix** von G .

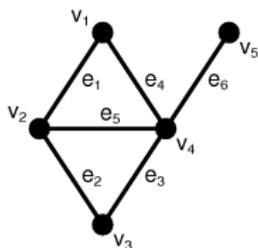
Beispiel 284 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} + A$$