
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 28.10.2005 vor der Vorlesung

Die Abgabe der Lösungen zwecks Korrektur und Bewertung erfolgt in der Übungswoche vom 24. bis 28. Oktober beim jeweiligen Tutor.

Aufgabe 1

1. Gegeben seien $A = \{a, 23, 42\}$, $B = \{a, 2, 3, \delta, 42\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}$. Wir definieren $D = B \cap (A \cup C)$, $E = D \cap (A \cap B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup B)$. Berechnen Sie $|\mathcal{P}(G)|$. Versuchen Sie dabei zunächst, G so weit wie möglich zu vereinfachen, ohne die Gleichungen für A , B und C zu benutzen.
2. Über $M = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Relationen $R_1, R_2 \subseteq M \times M$.

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

$$R_2 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$R_4 = \{(1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Welche dieser Relationen sind symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

Welche dieser Relationen sind Abbildungen?

Aufgabe 2

1. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung einer nicht-leeren Menge X in Y . Entscheiden Sie (mit Begründung), ob für beliebige Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B_1, B_2 \subseteq Y$ gilt:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$$

$$f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

2. Finden Sie ein Beispiel für Mengen $X, Y, A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.
3. Ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung! Dabei ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen.
4. Geben Sie eine Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ von den natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen an. Welche Bedeutung hat die Existenz einer derartigen Bijektion?
5. Zeigen Sie, dass für zwei Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Aufgabe 3

1. Beweisen oder widerlegen Sie: In jeder Gruppe von 10 Personen gibt es entweder 3, die sich gegenseitig kennen, oder 4, die sich gegenseitig nicht kennen. "sich kennen" ist dabei eine symmetrische Relation.
2. Zeigen Sie, dass $\log_{10} 3$ keine rationale Zahl ist, d. h. nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar ist.

Aufgabe 4

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Betrachten Sie die folgende falsche Aussage mit zugehörigem fehlerhaften Induktionsbeweis. An welcher Stelle wird eine nicht allgemein geltende Schlussfolgerung verwendet?

Behauptung: Alle Tiere haben die gleiche Farbe.

Beweis: Sei T eine Menge von Tieren. Wir zeigen durch Induktion über die Anzahl der Elemente in T , dass alle Tiere in T die gleiche Farbe haben.

Induktionsanfang ($|T| = 1$): wenn die Menge T nur ein Tier enthält, dann haben trivialerweise alle Tiere dieser Menge die gleiche Farbe.

Induktionsschritt ($|T| = n + 1$): nach Induktionsannahme gilt die Behauptung für Mengen der Grösse n . Wir entfernen nun ein Tier aus T und erhalten eine Menge T_1 . Nach Induktionsannahme haben alle Tiere in T_1 die gleiche Farbe. Wenn wir ein anderes Tier aus T entfernen, so erhalten wir T_2 und wiederum haben alle Tiere in T_2 die gleiche Farbe. Da T_1 und T_2 einen nichtleeren Schnitt haben, haben auch alle Tiere in $T_1 \cup T_2 = T$ die gleiche Farbe.