

---

## Diskrete Strukturen

---

Abgabetermin: 20. Januar 2006 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1

1. Welche der folgenden Gesetze für die Differenzenoperatoren  $\Delta$  und  $\nabla$ , den Translationsoperator  $E$  und die Identität  $I$  gelten allgemein für beliebige Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a)  $(\Delta\nabla)(f) = (E + E^{-1} - 2I)(f)$       (b)  $(\Delta - \nabla)(f) = (\Delta\nabla)(f)$   
(c)  $(E\Delta\nabla)(f) = (E)(f)$       (d)  $(E\nabla^2)(f) = (E - 2I + E^{-1})(f)$

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m \leq n$

(a)  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ ,      (b)  $\sum_{k=m}^n k \cdot \binom{k}{m}$ .

3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialinversion die Koeffizienten  $a_i$  in

$$n! = \sum_{i=0}^n a_i n^i.$$

4. Beweisen Sie für folgende Identitäten für alle  $n, i \geq 0$ :

(a)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i}$       (b)  $\sum_{k=0}^n s_{n,k} S_{k,i} (-1)^{n-k} = \delta_{n,i}$ .

Hierbei ist  $\delta_{n,i} = 1$ , falls  $n = i$ , und  $\delta_{n,i} = 0$ , falls  $n \neq i$ .  $s_{n,k}$  (bzw.  $S_{n,k}$ ) sind die Stirling-Zahlen erster (bzw. zweiter) Art.

### Aufgabe 2

1. Seien  $(a_n)_{n \geq 0}$  und  $(b_n)_{n \geq 0}$  zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien  $A(z)$  und  $B(z)$  entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{bzw.} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen  $(c_n)_{n \geq 0}$  und ihre erzeugende Funktion  $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

- (a) Mit  $c_n := a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$ .

- (b) Mit  $c_n := (n + 1) \cdot a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$ .
- (c) Mit  $c_n := n \cdot a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz}A(z)$ .
- (d) Mit  $c_n := \sum_{i=0}^n a_i$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $C(z) = \frac{A(z)}{1-z}$ .

2. Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}.$$

Bestimmen Sie die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ , zu der  $F(z)$  die erzeugende Funktion darstellt.

### Aufgabe 3

1. Gegeben sei die Rekursionsgleichung  $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \forall n \geq 2$  mit variablen Anfangsbedingungen  $a_0 = a$  und  $a_1 = b$ .
  - (a) Bestimmen Sie die entsprechende vollständige Rekursion (siehe Merkblatt 2).
  - (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung.
  - (c) Zeigen Sie, dass  $F(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$  die Erzeugendenfunktion zur Rekursionsgleichung ist.
  - (d) Zeigen Sie, dass  $a_n = \left(\frac{b}{2} - a\right)n + a \cdot 2^n$  gilt für alle  $n \geq 0$ .
2. Sei  $a_n$  für  $n \geq 0$  definiert durch  $a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$ . Zeigen Sie, dass stets  $a_n \in \mathbb{N}$  gilt, und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsgleichung für die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  an.

### Aufgabe 4

Gegeben sei die lineare Rekursion für Folgen  $(a_n)_{n \geq 0}$

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$$

mit variablen Anfangsbedingungen  $a_0 = a, a_1 = b, a_2 = c$ .

1. Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple bzw. der Maplefunktion `rsolve` die erzeugende Funktion und die allgemeine Lösung der Rekursion in Abhängigkeit von  $a, b$  und  $c$ .
2. Bestimmen Sie die Werte von  $a, b$  und  $c$ , für die die Rekursion eine konstante Lösung besitzt, d. h.  $a_n = \gamma$  für alle  $n \geq 0$  und ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ .