Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2005
Übungsblatt 11
20. Januar 2006

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 27. Januar 2006 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

1. Lukaszahlen L_n sind durch folgende Rekursionsgleichung mit Anfangsbedingungen definiert.
$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad \text{und} \quad L_0 = 2,\ L_1 = 1\,.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ gilt, wobei F_n die Fibonaccizahlen seien. Benützen Sie dabei die Rekursionsgleichung für F_n.
   (b) Geben Sie eine explizite Darstellung (Ausdruck in Abhängikeit von n) für L_n an.
2. Lösen Sie die folgende Rekursion für eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ positiver natürlicher Zahlen durch geeignete Transformation des Wertebereichs von a.
$$\frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n-2}} = 1 \quad \forall n \geq 2 \quad \text{und} \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2\,.$$

Aufgabe 2

Stellen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben zunächst eine homogene bzw. inhomogene lineare Rekursionsgleichung auf.

1. n Personen (Informatikstudenten I, Mathematikstudenten M oder Professoren P) rutschen hintereinander in einer der Rutschen im FMI-Gebäude. Wir unterscheiden die Personen nur insofern, als sie verschiedenen Gruppen I, M oder P angehören.
   (a) Wie viele Möglichkeiten von "Rutschreihenfolgen" gibt es, wenn nicht zwei Professoren hintereinander rutschen dürfen?
   (b) Wie viele Möglichkeiten von "Rutschreihenfolgen" gibt es, wenn die Anzahl der Professoren gerade sein soll?
2. Wie viele Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine drei aufeinander folgende Zahlen enthalten?
3. Verifizieren Sie die Lösung der in den vorausgegangenen Teilaufgaben erhaltenen Rekursiongleichungen mit Maple.

Aufgabe 3

Die Gradfolge eines einfachen Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. (a) Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0$. ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2$. iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2$.

   (b) Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

2. Zeigen Sie, dass es in jedem Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ zwei Knoten $x, y \in V$ gibt mit $\mathrm{d}(x) = \mathrm{d}(y)$.

Aufgabe 4

Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) G ist ein Baum.

(d) G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\};\ v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.

(e) G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.