

---

## Diskrete Strukturen

---

Abgabetermin: 11. November 2005 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1

1. Es seien  $m, n, k \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen mit  $m > n \cdot k$ . Zeigen Sie die folgende Aussage jeweils mit Hilfe eines indirekten Beweises und mit Hilfe eines Induktionsbeweises über die Zahl  $n$ :

Verteilt man  $m$  Bälle auf  $n$  Schubladen, so befinden sich in mindestens einer Schublade  $k + 1$  oder mehr Bälle.

2. Sei  $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\} \subseteq \mathbb{N}$  mit  $|A| = n + 1$ . Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen  $\in A$  gibt, deren Summe  $2n + 1$  ist.

### Aufgabe 2

Gleichungen (Äquivalenzen) für boolesche Ausdrücke können in endlich vielen Schritten durch Einsetzen aller möglichen Argumentkombinationen von Wahrheitswerten und entsprechender Auswertung überprüft werden. Andererseits kann man die Gültigkeit boolescher Gleichungen auch durch algebraische Umformung gewinnen, indem man diese Gleichungen formal aus Axiomen nach Regeln eines Aussagenkalküls herleitet. Die booleschen Operatoren  $=$  und  $\equiv$  sind im Folgenden daher als identisch zu interpretieren, außer dass Ketten von  $=$ 's konjunktional zu lesen sind und  $=$  kleinere Präzedenz als  $\equiv, \wedge, \vee, \neg, \dots$  hat.

1. Zeigen Sie durch Einsetzen aller möglichen Wahrheitswerte und bekannter Auswertung der booleschen Operatoren die sogenannte *Goldene Regel*:

$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q.$$

Beachten Sie, dass der Äquivalenzoperator  $\equiv$  assoziativ ist und geringere Präzedenz als  $\wedge$  und  $\vee$  hat.

2. Wir setzen nun die Goldene Regel als Axiom innerhalb eines Aussagenkalküls voraus. Für die Operatoren  $\equiv$  und  $\vee$  seien die Axiome der Assoziativität und Kommutativität (Symmetrie) gegeben. Wir setzen außerdem die Distributivität von  $\vee$  gegenüber  $\equiv$  voraus, also  $p \vee (r \equiv s) = (p \vee r) \equiv (p \vee s)$ . Als Herleitungsregeln stehen, neben den bekannten Gesetzen von  $=$ , die Leibnizregel und die Substitutionsregel zur

Verfügung. Mit der *Leibnizregel* kann aus einer Gleichung  $X = Y$  ( $X, Y$  boolesche Ausdrücke) und einem beliebigen booleschen Ausdruck  $A$  die Gleichung

$$A[z := X] = A[z := Y]$$

erzeugt werden. Dabei ist  $z$  eine beliebige boolesche Variable, die in  $A$  nicht gebunden vorkommt, und  $A[z := X]$  bezeichnet den booleschen Ausdruck, der aus  $A$  entsteht, indem in  $A$  alle Vorkommen von  $z$  simultan durch  $X$  ersetzt werden.

Die *Substitutionsregel* gestattet, aus einer Gleichung  $X = Y$ , in der die Variable  $z$  nur ungebunden vorkommt, und einem beliebigen booleschen Ausdruck  $A$  die Gleichung

$$X[z := A] = Y[z := A]$$

zu erzeugen.

Beweisen Sie nun formal durch Anwendung des nahegelegten Aussagenkalküls die Assoziativität der Operation  $\wedge$ .

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r).$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Goldene Regel, um in geeigneter Weise die Vorkommen des Operators  $\wedge$  zu eliminieren.

### Aufgabe 3

1. Für reellwertige Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Klasse  $o(f(n))$  aller Funktionen  $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , die ein *kleineres Wachstum* besitzen als  $f$ , wie folgt definiert:

$$g(n) \in o(f(n)) \quad :\iff \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0)[|g(n)| < \varepsilon \cdot |f(n)|].$$

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion  $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  hat für gegen  $\infty$  strebendes  $n$  den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0 \quad :\iff \quad g(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die überall den Wert 1 besitzt. Man zeige:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

(b) Falls  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  nur endlich viele Nullstellen besitzt, dann gilt

$$g(n) \in o(f(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = 0.$$

(c)  $f(n) \notin o(f(n))$ .

2. Der Grenzwertbegriff wird nun wie folgt erweitert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = a \quad :\iff \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |g(n) - a| = 0.$$

Es existiere  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \in \mathbb{R}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(n) + f(n)).$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(n) \cdot f(n)).$$

#### Aufgabe 4

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsverhalten, also so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen  $f$  und  $g$  gilt:  $f(n) \in o(g(n))$ . Begründen Sie Ihre Anordnung.

$$f_1(n) = 2^n,$$

$$f_3(n) = n,$$

$$f_2(n) = \sqrt{n},$$

$$f_4(n) = (\log n)^2.$$