
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 18. November 2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei U eine nichtleere Menge. Zusammen mit den Operationen der Vereinigung $A \cup B$, des Durchschnitts $A \cap B$ und des Komplements \overline{C} von Teilmengen A, B, C von U , wobei $\overline{C} = \{x \in U; x \notin C\}$, bildet die Potenzmenge $\mathcal{P}(U)$ eine Algebra. Sie heißt Potenzmengenalgebra über U mit $\mathcal{P}(U)$ als Trägermenge.

1. Zeigen Sie die Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. Seien A_i Teilmengen von U für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in U$. Berechnen Sie die formallogische Verneinung der Formeln

$$(\forall i \in \mathbb{N}) [x \in A_i] \quad \text{und} \quad (\exists i \in \mathbb{N}) [x \in A_i]$$

so, dass der Verneinungsoperator (\neg) nicht mehr links von einem Quantor steht.

3. Wir betrachten Relationen $R \subseteq U \times U$. Berechnen Sie die formallogische Verneinung von

$$(\exists x \in U \forall y \in U) [x R y]$$

so, dass der Verneinungsoperator (\neg) nicht mehr links von einem Quantor steht.

4. Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Menge U und einer binären Relation R über U an, so dass folgende Formeln gelten.

$$(\neg \exists x \in U \forall y \in U) [x R y] \quad \text{und} \quad (\forall y \in U \exists x \in U) [x R y].$$

Aufgabe 2

1. Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen über \mathbb{N}_0 (reelle Folgen).

(a) Man zeige:

$$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) \in \omega(|f(n)|).$$

(b) Geben Sie Funktionen f, g mit je höchstens endlich vielen Nullstellen an, so dass gilt

$$f(n) \notin O(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|).$$

(c) Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen über \mathbb{N}_0 mit je höchstens endlich vielen Nullstellen. Man zeige:

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|}$ existiert dann gilt:

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(|g(n)|).$$

(d) Seien $f(x) = x^5 - x^3 + 6$ und $g(x) = -6x^5 + 2x^2 - 10$. Man zeige:

$$f(x) \in \Theta(|g(x)|).$$

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} 2^{100} \cdot n^2 &\in O(n^2), & e^n &\in \omega(2^n), \\ 2^{\sqrt{2 \ln n}} &\in o(n), & (\ln n)^{\ln n} &\in \Theta(n^{\ln \ln n}). \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling'schen Formel:

$$\ln(n!) \in \Theta(n \ln n), \quad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right).$$

3. In der Analysis werden Folgen in Funktionen eingebettet, für die dann Ableitungen definiert sind. Dies gestattet weitergehende Formeln für die Berechnung von $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ in dem Fall, dass für f und g zugleich $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ gilt oder zugleich $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ gilt ("Fall von uneigentlichen Quotienten"). Wir nennen hier (ohne Beweis) eine der l'Hôpital'schen Regeln. Sofern es im Fall uneigentlicher Quotienten der Einzellimiten von f und g Ableitungen von f und g gibt und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entscheiden Sie durch Anwendung der obigen l'Hôpital'schen Regel die Aussage

$$n \cdot \log n \in \Theta(n^{\frac{3}{2}}).$$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Funktion $y(x) = x^3 + (2\sqrt{3} - 2)x^2 - (4\sqrt{3} + 24)x + 48$.

1. Machen Sie sich mit den Grundfunktionen des Maple Systems vertraut (siehe Merkblatt 1, Maple). Berechnen Sie mit Maple alle Lösungen α_i der Gleichung

$$y(x) = 0.$$

2. Benutzen Sie die Plotfunktion in Maple zum Ausdruck des Funktionsverlaufs von $y(x)$ in einem genügend großen Bereich, der alle Nullstellen von $y(x)$ im Innern enthält.