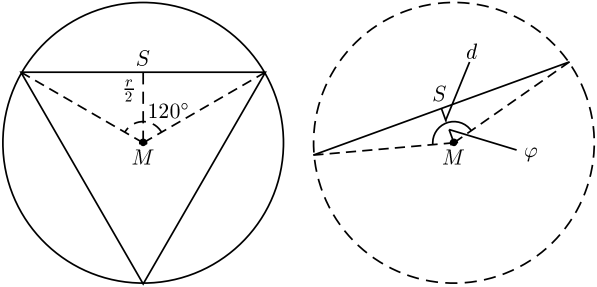
1.4.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

Bertrand'sches Paradoxon

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis A).


S
$\frac{r}{2}$
120°
M
d
S
M
φ

Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

2. Wichtige stetige Verteilungen

2.1 Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}\,.$$

2.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung nimmt unter den stetigen Verteilungen eine besonders prominente Position ein.

Definition 97

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x; \mu, \sigma)$$

besitzt.

In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0, 1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x; 0, 1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, t =: \Phi(x; \mu, \sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).

Lemma 98

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis:

Wir berechnen zunächst I^2:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}\,y\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen $x := r\cos\phi$ und $y := r\sin\phi$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

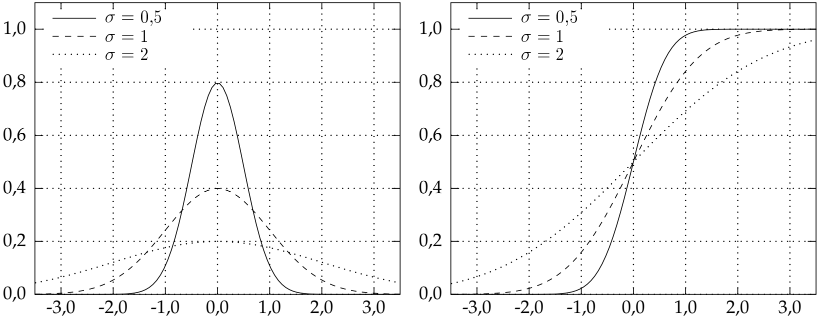
Beweis (Forts.):

und wir erhalten

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \,\mathsf{d}\, r \,\mathsf{d}\, \phi \;=\; \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^{\infty} \mathsf{d}\, \phi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \,\mathsf{d}\, \phi \;=\; 2\pi.$$

$\square$



Dichte und Verteilung von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Satz 99 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] &= \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, u.\end{aligned}$$

Nach der Substitution $u = (v - b)/a$ und d $u = (1/a) \cdot$ d v erhalten wir

Beweis (Forts.):

$$\Pr[Y \le y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, v\,.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog. $\square$

Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Dann ist nach Satz 99 Y $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\Pr[a < X \leq b] &= \Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \ .\end{aligned}$$