

---

## Diskrete Strukturen II

---

*Abgabetermin: 26. Mai 2006 vor der Vorlesung*

### Aufgabe 1

1. Sei  $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  und  $\Pr[\omega] \neq 0$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Kann es in  $W$  zwei verschiedene unabhängige Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  geben, wenn  $|A| = |B| = 2$  gilt? Beweis!
2. Seien  $X$  und  $Y$  voneinander unabhängige Zufallsvariable. Es gelte  $\mathbb{E}[Y] = 2$ ,  $\mathbb{E}[X^2Y] = 6$ ,  $\mathbb{E}[XY^2] = 8$  und  $\mathbb{E}[(XY)^2] = 24$ . Berechnen Sie  $\mathbb{E}[X]$ !

### Aufgabe 2

In einem Schützenverein haben Anfänger beim Tontaubenschießen nur eine Trefferquote von 10%.

1. Seien  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Anfänger bei  $k$  Schüssen genau  $i$  Treffer?
2. Wir wollen die Leistung von 100 Anfängern mit Noten bewerten. Note 2 bedeutet, dass der Schütze bei 2 Schüssen genau 1 Treffer erzielt. Nun lassen wir jeden der 100 Schützen (je) 2 Schussversuche machen und bezeichnen mit  $X$  die Anzahl der Schützen, die die Note 2 erhalten.

Geben Sie die Dichtefunktion der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen  $X$  an! Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ !

### Aufgabe 3

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  kaputt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage lang hintereinander störungsfrei arbeitet?
2. Wie groß ist die erwartete Anzahl  $k$  von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen einer Maschine, unter der Annahme, dass die Maschine am Tag  $k + 1$  defekt ist?

## Aufgabe 4

1. Wir besitzen einen unfairen Würfel, der die Augenzahlen  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  mit Wahrscheinlichkeiten  $\Pr[k] = \frac{1}{6} + \delta_k$  anzeigt, die von der Gleichverteilung jeweils um  $\delta_k$  abweichen, wobei  $|\delta_k| < \frac{1}{12}$  gelten soll. Um die Fairness beim Spiel mit diesem Würfel zu erhöhen, ändern wir die Spielregeln. Jeder Spieler muss den Würfel zweimal werfen, wobei sich nun das Ergebnis  $X$  als Summe der einzeln geworfenen Augenzahlen modulo 6 ergeben soll.

Zeigen Sie, dass die maximale Abweichung der Wahrscheinlichkeiten der Werte von  $X$  von der Gleichverteilung höchstens halb so groß ist wie das Maximum der  $\delta_k$ .

2. Für die folgende Teilaufgabe gibt es zwar keine Hausaufgabenpunkte, wohl aber einen Preis von 1 Euro und entsprechender Ehrung in der Zentralübung für die beste Begründung der Lösung.

Wir benennen eine Anzahl  $n$  von (fairen) Würfeln. Dann werfen wir  $n$  Würfel. Das Ergebnis eines Wurfes (mit  $n$  Würfeln) soll die Anzahl der *nicht* gewürfelten Augen multipliziert mit der Anzahl  $n$  der gewählten Würfel sein.

Welches ist die Anzahl  $n_{max}$  von Würfeln, die den Erwartungswert des Ergebnisses maximiert? Begründung!