
Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 2. Juni 2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 1

Wir machen n unabhängige Würfe mit einem Paar fairer Würfel. Y sei die Summe aller gewürfelten Augen.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Y !
2. Zeigen Sie, dass Y mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $7n \pm 10\sqrt{35n/6}$ liegt.

Aufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $1/6$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon *nicht* verhungert.

Aufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich $4/3$ des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfeln?
Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \rightarrow \infty$?
2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \leq \frac{\mu}{2}\right] = 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 4

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?
2. Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass die Poisson-Verteilung ein Grenzwert der Binomialverteilung ist. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.