

---

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

---

Abgabetermin: 12. Juli 2006 vor der Zentralübung

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, wobei  $V = \{u_1, \dots, u_n\}$  sei. Eine *Knotenüberdeckung* von  $G$  ist eine Knotenmenge  $C \subseteq V$ , so dass für jede Kante  $\{u_i, u_j\} \in E$  gilt:  $\{u_i, u_j\} \cap C \neq \emptyset$ . Beim Optimierungsproblem VC (*engl.* vertex cover) soll eine kleinste Knotenüberdeckung bestimmt werden.

(a) Erläutern Sie, dass das folgende ILP eine Arithmetisierung von VC ist.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \\ & x_i + x_j \geq 1 \quad \forall \{u_i, u_j\} \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall u_i \in V \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass deterministisches Runden der Lösung des relaxierten Problems, d. h. die Entscheidung „falls  $x_i \geq \frac{1}{2}$ , dann lege Knoten  $u_i$  in  $C$ “, eine Approximation der relativen Güte 2 garantiert. (Bemerkung: Zuerst muSS dazu gezeigt werden, dass durch diese Rundungsvorschrift überhaupt eine Knotenüberdeckung gewonnen wird.)

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, wobei  $V = \{u_1, \dots, u_n\}$  sei. Eine *unabhängige Menge* (*engl.* independent set) von  $G$  ist eine Knotenmenge  $I \subseteq V$ , so dass für alle Kanten  $\{u_i, u_j\} \in E$  gilt:  $|\{u_i, u_j\} \cap I| \leq 1$ . Beim Optimierungsproblem Independent Set soll eine größte unabhängige Menge von  $G$  gefunden werden. Stellen Sie ein ILP für das Problem Independent Set auf.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \\ & (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \\ & \wedge x_3(x_1 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \wedge x_1 \end{aligned}$$

eine Boolesche (4, 10)-Formel in KNF über der Variablenmenge  $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

- Wieviele erfüllende Belegungen haben die einzelnen Klauseln?
- Bestimme  $b_\Phi^*$ .
- Lösen sie das entsprechende relaxierte LP.

#### **Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Beweisen Sie den Satz 6.3 aus der Vorlesung und geben Sie eine Boolesche  $(n, m)$ -Formel an, für die der Algorithmus tatsächlich nur  $m/2$  Klauseln erfüllt.