## 6.4 Splay-Trees als Suchbäume

In diesem Abschnitt untersuchen wir Splay-Trees, eine Datenstruktur, die den MFR-Ansatz auf Bäume überträgt:

> *Wird auf ein Element durch eine Operation zugegriffen, so wird dieses im Splay-Tree in geeigneter Weise zur Wurzel befördert, um, sollten weitere Zugriffe auf dieses Element folgen, diese zu beschleunigen.*

Wir untersuchen hier Splay-Trees als Suchbäume, d.h. die Schlüssel stammen aus einem total geordneten Universum, und innerhalb des Splay-Trees soll die Invariante

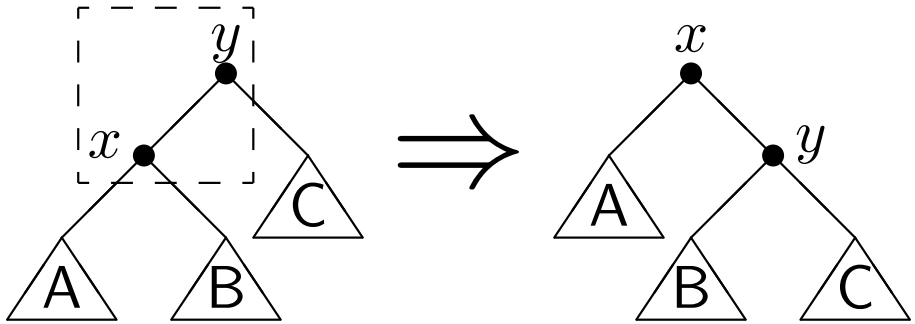
$$\text{“Knoten im lUb} \leq k(x) \leq \text{Knoten im rUb“}$$

gelten.

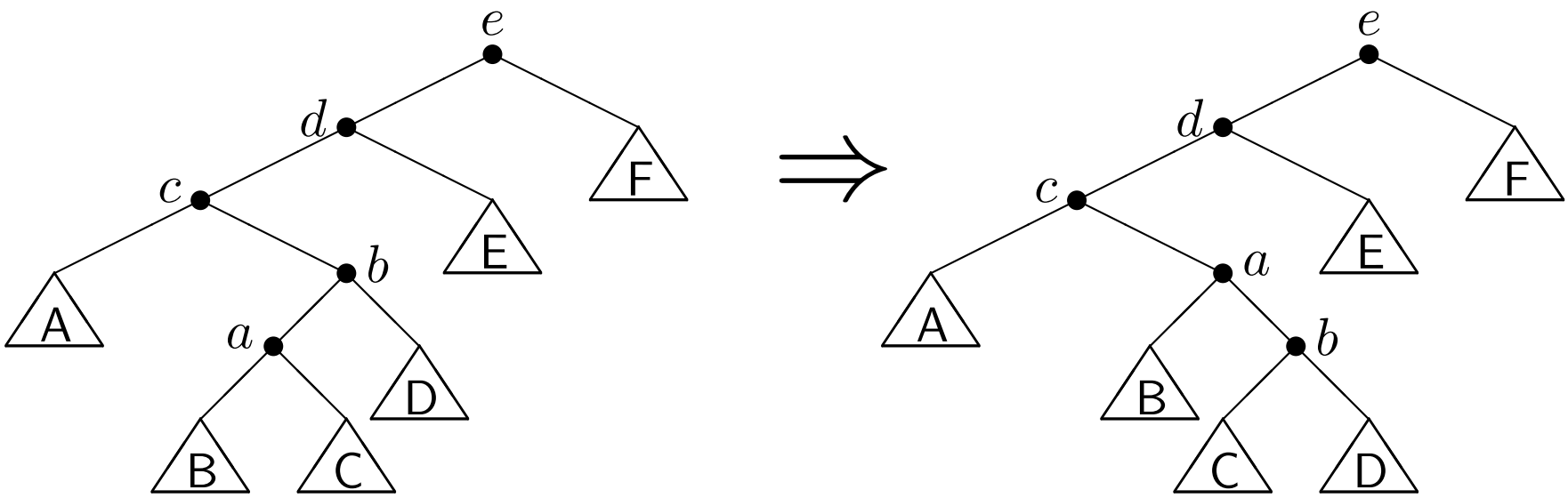
Ansonsten ist ein Splay-Tree ein interner binärer Suchbaum.

Wir benutzen Rotationen, um unter Beibehaltung der Invariante einen Schlüssel näher zur Wurzel zu bewegen, und zwar Einfach- und Doppelrotationen.

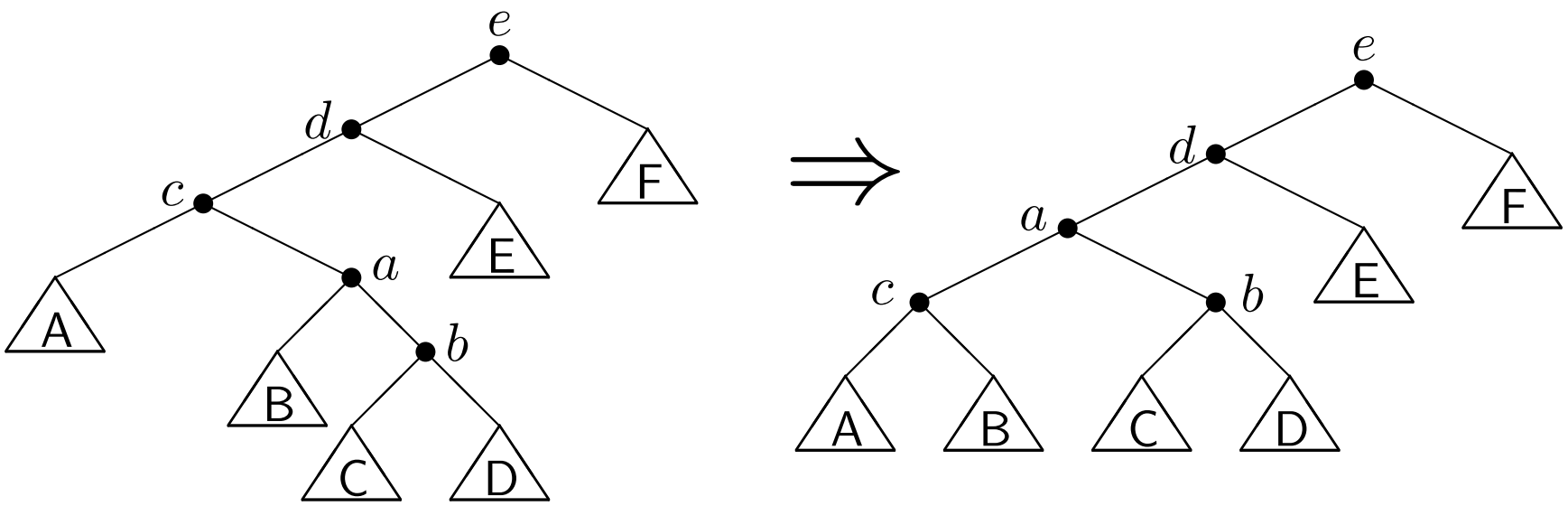
# Beispiel 54



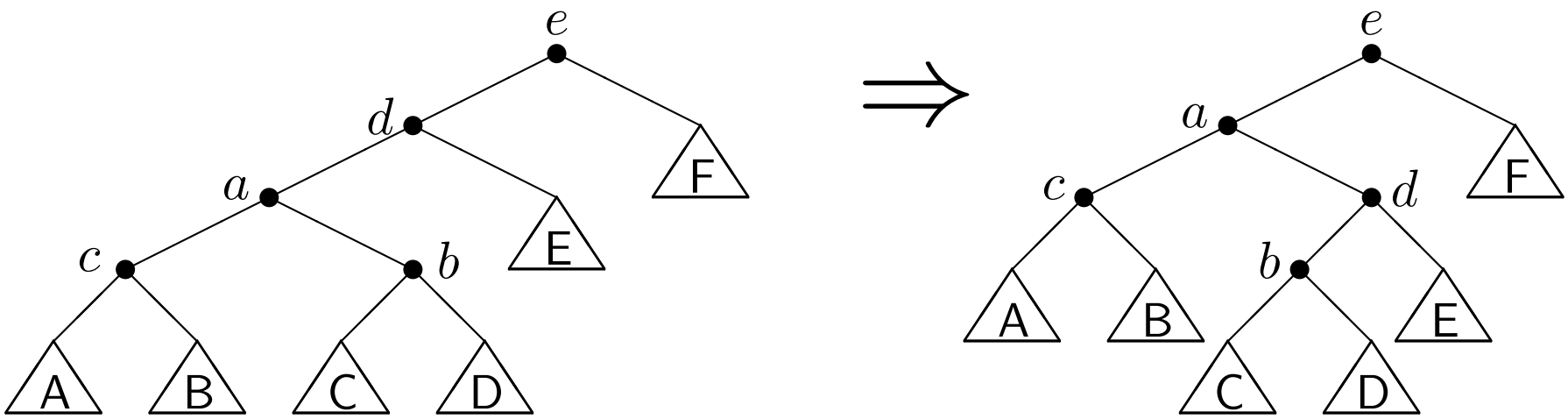
# Beispiel 54



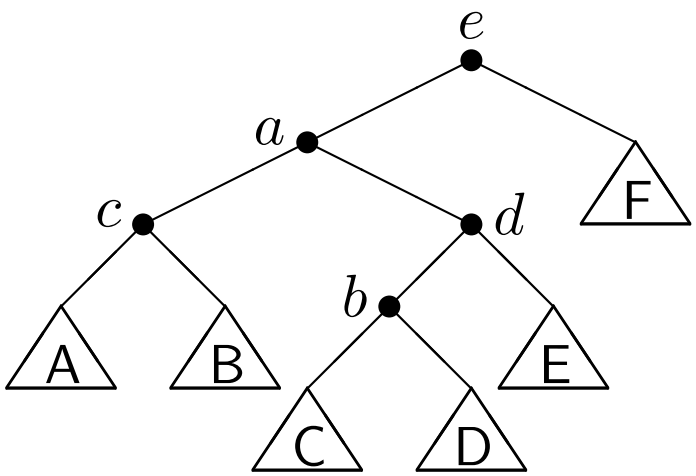
# Beispiel 54

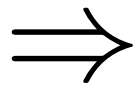


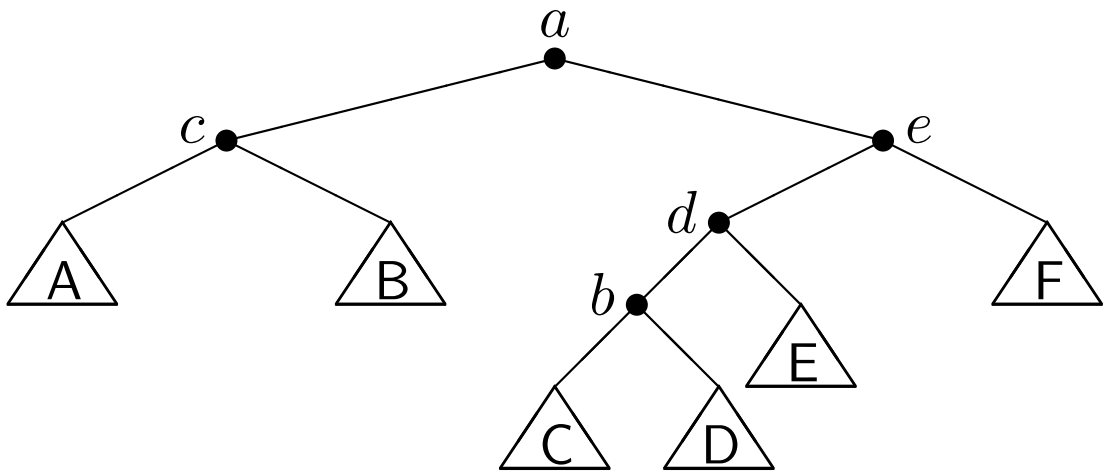
# Beispiel 54



# Beispiel 54



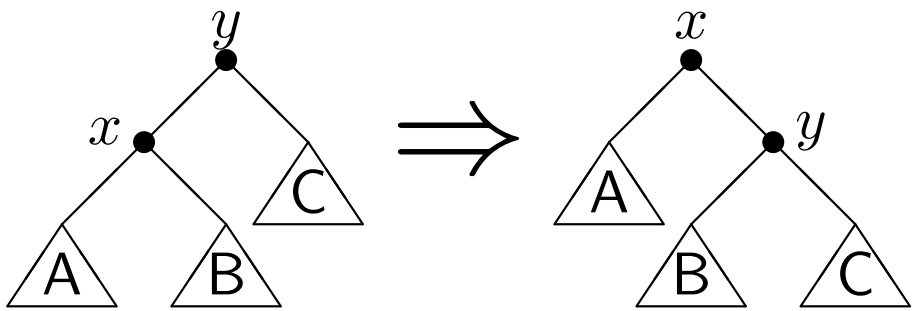


### 6.4.1 Die Splaying-Operation

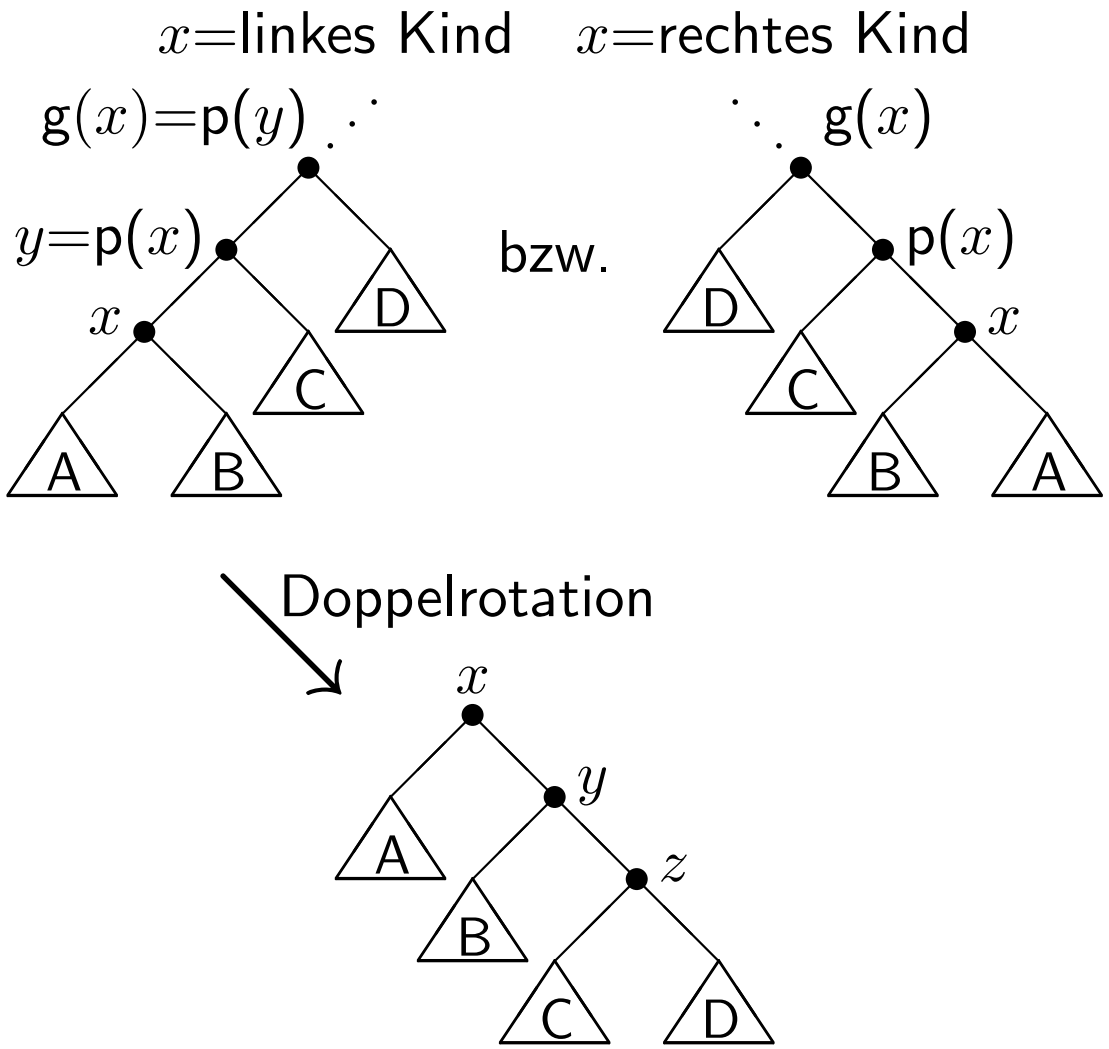
Ein Knoten, auf den zugegriffen wird (Splay$(x, T)$), wird durch eine Folge von einfachen und doppelten Rotationen an die Wurzel bewegt.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

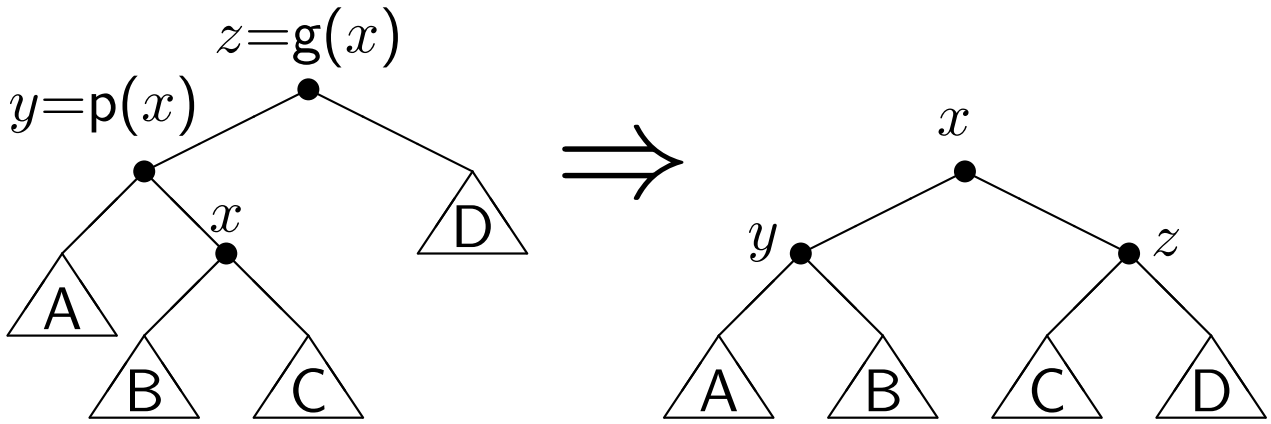
1. (zig): $x$ ist Kind der Wurzel von $T$: einfache Rotation



2. (zig-zig): $x$ hat Großvater g($x$) und Vater p($x$); $x$ und p($x$) sind jeweils linke (bzw. rechte) Kinder ihres Vaters.



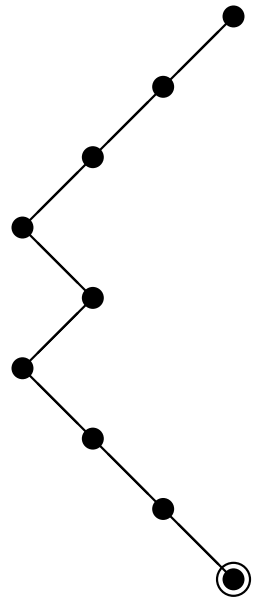
3. (zig-zag): $x$ hat Großvater g($x$) und Vater p($x$), $x$ ist linkes (rechtes) Kind von p($x$), p($x$) ist rechtes (linkes) Kind von g($x$).



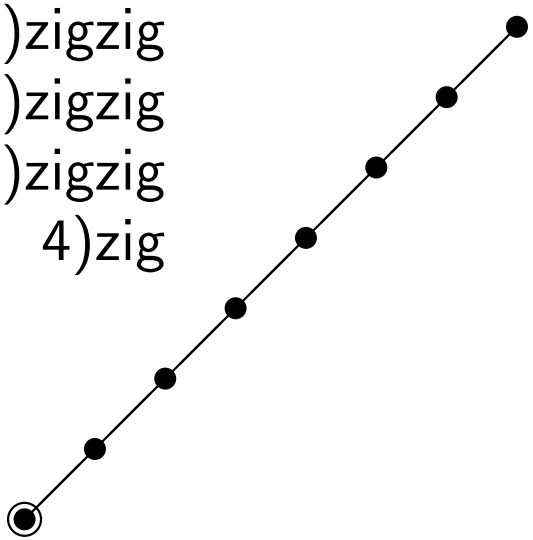
## Beispiel 55

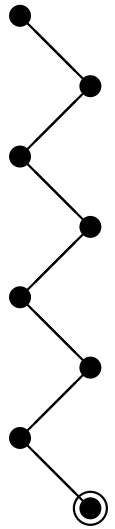
Führe die Splaying-Operation jeweils mit dem eingekreisten Element durch:

1)zigzig
2)zigzag
3)zigzag
4)zigzig



1)zigzig
2)zigzig
3)zigzig
4)zig





1)zigzag
2)zigzag
3)zigzag
4)zig

## 6.4.2 Amortisierte Kostenanalyse der Splay-Operation

Jeder Knoten habe ein Gewicht $w(x) > 0$. Das Gewicht $tw(x)$ des Unterbaums mit Wurzel $x$ ist die Summe der Gewichte aller Knoten im Unterbaum. Setze

$$\text{Rang } r(x) = \log(tw(x))$$

$$\text{Potenzial eines Baumes } T = \sum_{x \in T} r(x)$$

**Lemma 56**

*Sei $T$ ein Splay-Tree mit Wurzel $u$, $x$ ein Knoten in $T$. Die amortisierten Kosten für Splay$(x, T)$ sind*

$$\leq 1 + 3(r(u) - r(x)) = \mathcal{O}\left(\log \frac{tw(u)}{tw(x)}\right) .$$

## Beweis:

Induktion über die Folge von (Doppel)Rotationen:

Berechne $r$ und $r'$, $tw$ und $tw'$, die Rang- bzw. Gewichtsfunktion vor und nach einem Rotationsschritt. Wir zeigen, dass die amortisierten Kosten im

$$\text{Fall 1 (zig)} \leq 1 + 3(r'(x) - r(x))$$

und in den

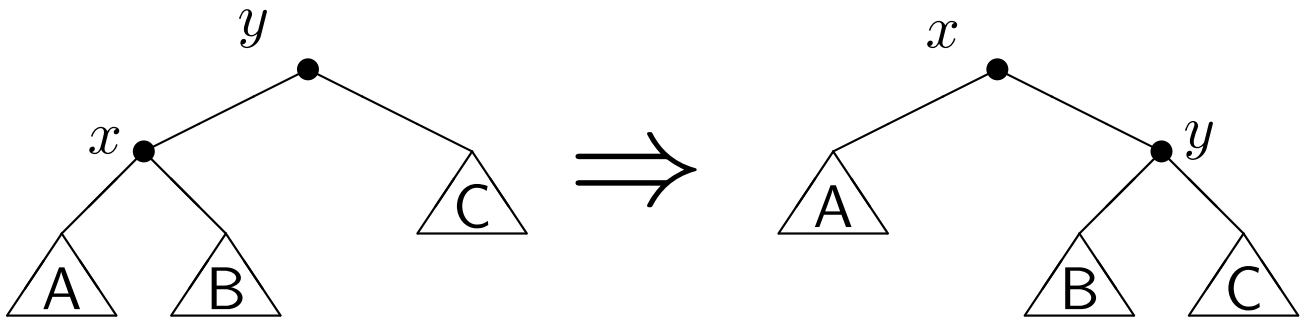
$$\text{Fällen 2 und 3 (zig-zig bzw. zig-zag)} \leq 3(r'(x) - r(x))$$

sind.

$y$ sei der Vater von $x$, $z$ der Großvater (falls er existiert).

# Beweis (Forts.):

1. Fall:

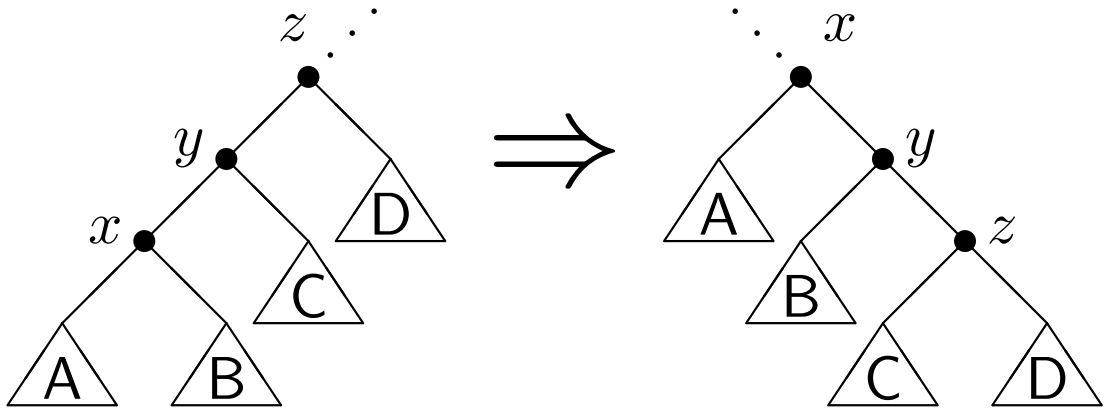



Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\leq 1 + r'(x) + r'(y) - r(x) - r(y) \\
&\leq 1 + r'(x) - r(x), && \text{da } r'(y) \leq r(y) \\
&\leq 1 + 3(r'(x) - r(x)), && \text{da } r'(x) \geq r(x)
\end{aligned}
$$

# Beweis (Forts.):

2. Fall:




Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\leq 2 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z) \\
&= 2 + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y), \quad \text{da } r'(x) = r(z) \\
&\leq 2 + r'(x) + r'(z) - 2r(x), \text{ da } r'(x) \geq r'(y) \text{ und } r(y) \geq r(x)
\end{aligned}
$$

## Beweis (Forts.):

Es gilt, dass

$$2 + r'(x) + r'(z) - 2r(x) \leq 3(r'(x) - r(x)) \,,$$

d.h.

$$2r'(x) - r(x) - r'(z) \geq 2 \,.$$

Betrachte dazu die Funktion

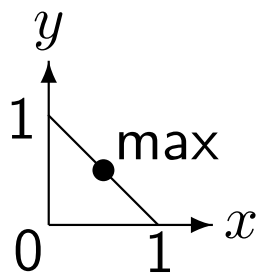
$$f(x, y) = \log x + \log y$$

in dem Bereich

$$x, y > 0, \;\; x + y \leq 1 \,.$$

## Beweis (Forts.):

**Behauptung:** $f(x,y)$ nimmt sein eindeutiges Maximum im Punkt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ an.




**Beweis der Behauptung:** Da die $\log$-Funktion streng monoton wachsend ist, kann sich das Maximum der Funktion $f(x,y) = \log x + \log y$ nur auf dem Geradensegment $x + y = 1$, $x, y > 0$ befinden. Dadurch erhalten wir ein neues Maximierungsproblem für die Funktion $g(x) = \log(x) + \log(1-x)$ auf diesem Geradensegment. Da $g(x)$ an den Rändern gegen $-\infty$ strebt, muss es sich um ein lokales Maximum handeln.

## Beweis (Forts.):

Die einzige Nullstelle der Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right),$$

wenn $\log = \log_a$, ist $x = 1/2$ (unabhängig von $a$).

Weiter ist

$$g''(x) = -\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

Da $g''(0.5) < 0$ ist, nimmt $g(x)$ sein globales Maximum in $x = 0.5$ an. Insgesamt folgt, dass die Funktion $f(x, y) = \log x + \log y$ ihr globales Maximum im Bereich $x, y > 0$, $x + y \leq 1$ an der Stelle $(0.5, 0.5)$ annimmt.

Damit ist die obige Behauptung gezeigt. Wir fahren mit dem Beweis der Abschätzung im Lemma fort.

## Beweis (Forts.):

Damit gilt im 2. Fall:

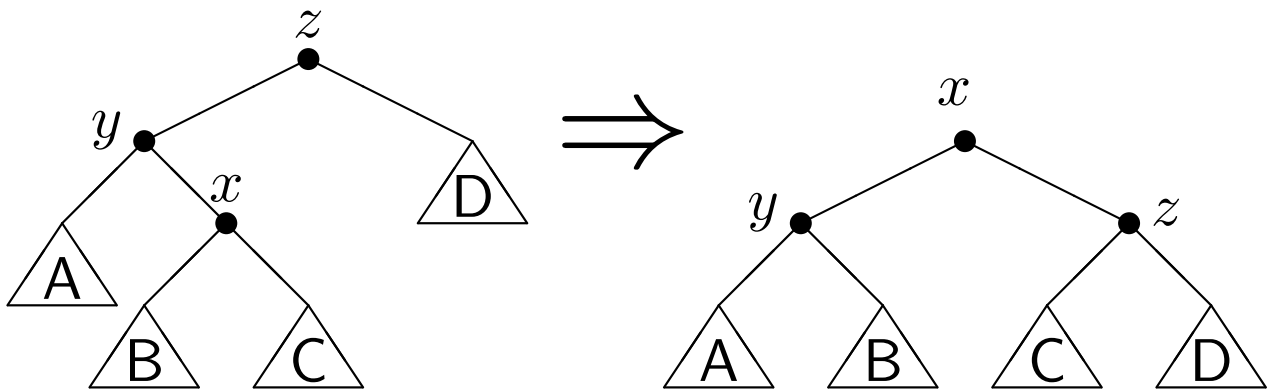
$$r(x) + r'(z) - 2r'(x) = \log\left(\frac{tw(x)}{tw'(x)}\right) + \log\left(\frac{tw'(z)}{tw'(x)}\right) \leq -2\,,$$

da

$$tw(x) + tw'(z) \leq tw'(x)\,.$$

# Beweis (Forts.):

3. Fall:




Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\leq 2 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z) \\
&\leq 2 + r'(y) + r'(z) - 2r(x), && \text{da } r'(x) = r(z) \text{ und } r(x) \leq r(y) \\
&\leq 2(r'(x) - r(x)), && \text{da } 2r'(x) - r'(y) - r'(z) \geq 2\,.
\end{aligned}
$$

(Letzteres folgt aus der Behauptung über $f(x, y)$ wie im 2. Fall.)

## Beweis (Forts.):

Die Gesamtbehauptung des Lemmas folgt dann durch Aufaddieren der amortisierten Kosten für die einzelnen Schritte (Teleskop-Summe). □

Sei $T$ ein Splay-Tree mit $n$ Knoten. Falls sich die Gewichte der Knoten nicht ändern, ist die Verringerung des Potenzials durch eine Folge von Splay-Operationen Splay$(x_j, T)$, $j = 1, \ldots, n$, beschränkt durch

$$\sum_{i=1}^{n} (\log W - \log w_i) = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{W}{w_i} \,,$$

wobei

$$W := \sum_{i=1}^{n} w_i \,,$$

$$w_i = \text{Gewicht von } x_i \,.$$

## Satz 57

*Die gesamten Kosten für die $m$ Zugriffe im Splay-Tree sind*

$$\mathcal{O}((m+n)\log n + m)\,.$$

## Beweis:

Wähle $w_i = \frac{1}{n}$ für alle Knoten. Dann sind die amortisierten Kosten für einen Zugriff $\leq 1 + 3\log n$, da $W = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Die Verringerung des Potenzials ist

$\leq \sum_{i=1}^{n} \log \frac{W}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \log n = n \log n.$

Damit sind die reellen Kosten $\leq m(1 + 3\log n) + n\log n.$ □

## Satz 58

*Sei $q(i)$ die Anzahl der Zugriffe auf das Element $x_i$ (in einer Folge von $m$ Zugriffen). Falls auf jedes Element zugegriffen wird (also $q(i) \geq 1$ für alle $i$), dann sind die (reellen) Gesamtkosten für die Zugriffe*

$$\mathcal{O}\left(m + \sum_{i=1}^{n} q(i) \cdot \log\left(\frac{m}{q(i)}\right)\right) .$$

## Beweis:

Setze das Gewicht des $i$-ten Knotens gleich $\frac{q(i)}{m}$.

$$\Rightarrow \mathrm{W} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q(i)}{m} = 1 .$$

Der Rest folgt wie zuvor. □

## Satz 59

*Betrachte eine Folge von Zugriffsoperationen auf eine $n$-elementige Menge. Sei $t$ die dafür nötige Anzahl von Vergleichen in einem optimalen statischen binären Suchbaum. Dann sind die Kosten in einem (anfangs beliebigen) Splay-Tree für die Operationenfolge $\mathcal{O}(t + n^2)$.*

## Beweis:

Sei $U$ die Menge der Schlüssel, $d$ die Tiefe eines (fest gewählten) optimalen statischen Suchbaumes, sei für $x \in U$ , $d(x)$ die Tiefe von $x$ in diesem Suchbaum. Setze

$$tw(x) := 3^{d-d(x)} .$$

Sei $T$ ein beliebiger Splay-Tree für $U$, $|U| =: n$.

$$bal(T) \leq \sum_{x \in U} r(x) = \sum_{x \in U} \log(3^{d-d(x)}) = \sum_{x \in U} (\log 3)(d - d(x)) =$$

$$= (\log 3) \sum_{x \in U} (d - d(x)) = \mathcal{O}(n^2);$$

$$\sum_{x \in U} tw(x) = \sum_{x \in U} 3^{d-d(x)} \leq \sum_{i=0}^{d} 2^i 3^{d-i} = 3^d \sum_{i=0}^{d} (\frac{2}{3})^i \leq 3^d \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{d+1}$$

$$\Rightarrow \log \frac{tw(T)}{tw(x)} \leq \log \frac{3^{d+1}}{3^{d-d(x)}} = \log 3^{d(x)+1}.$$

## Beweis (Forts.):

Damit ergibt sich für die amortisierten Kosten von Splay$(x, T)$

$$\mathcal{O}(\log \frac{tw(T)}{tw(x)}) = \mathcal{O}(d(x) + 1)\,.$$

Die amortisierten Kosten sind damit

$\leq c \cdot$ Zugriffskosten (#Vergleiche) im optimalen Suchbaum

(wo sie $d(x) + 1$ sind).

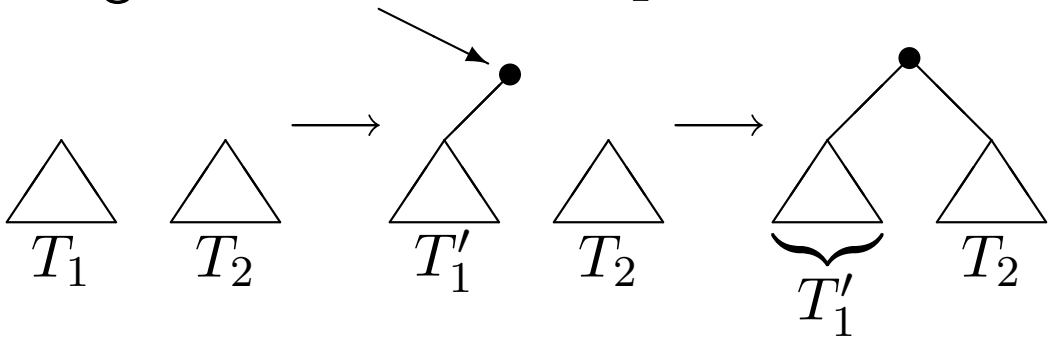
Die gesamten amortisierten Kosten für die Zugriffsfolge sind daher $\leq c \cdot t$.
Die reellen Kosten ergeben sich zu $\leq$ amort. Kosten + Verringerung des Potenzials, also $\mathcal{O}(t + n^2)$. □

## 6.4.3 Wörterbuchoperationen in Splay-Trees

Alle folgenden Operationen werden mit Hilfe von Splay implementiert.

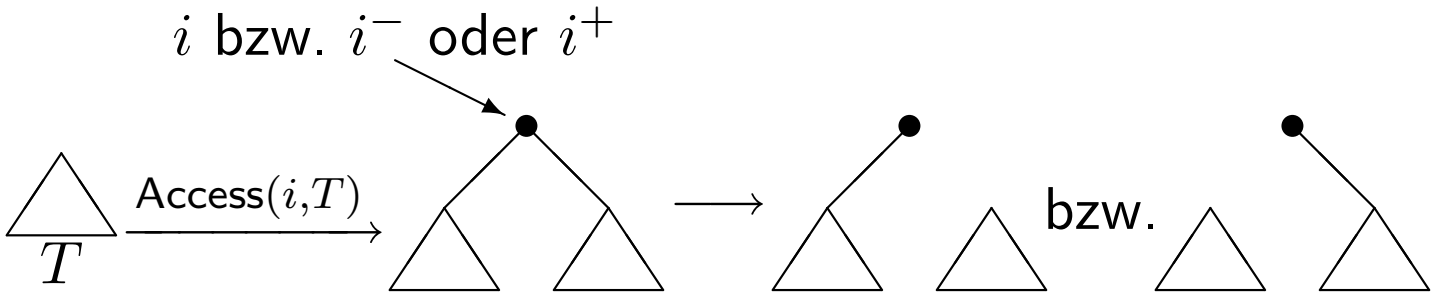
- *Access*$(i, T)$: $\surd$ (siehe oben)
- *Join*$(T_1, T_2)$:

  größtes Element in $T_1$

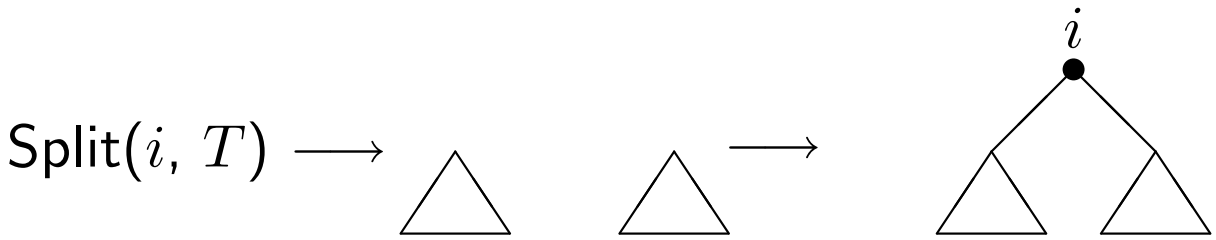



Beachte: Falls $x \in T_1$, $y \in T_2$, dann $x < y$.

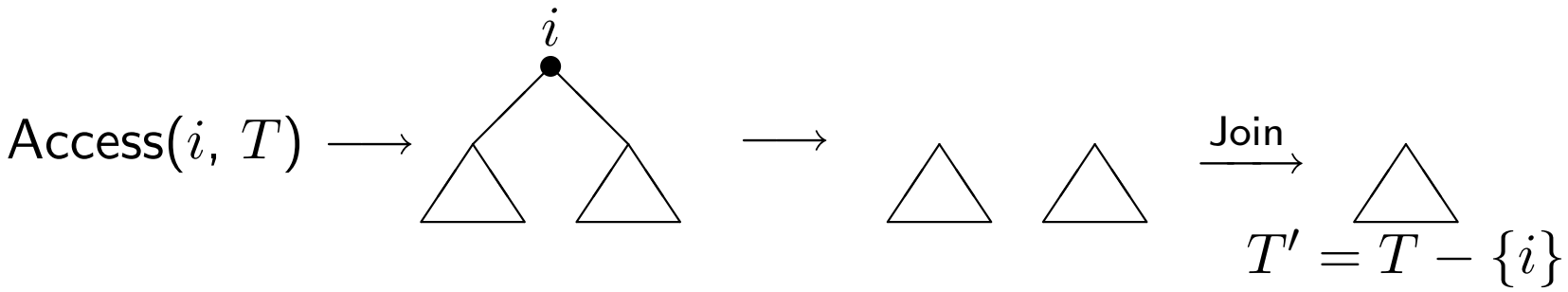
- *Split*$(i, T)$:




- *Insert*$(i, T)$:




- *Delete*$(i, T)$:



Sei $i \in U$, $T$ ein Splay-Tree. Dann bezeichnen wir mit $i-$ (bzw. $i+$) den Vorgänger (bzw. den Nachfolger) von $i$ in $U$ (falls diese existieren). $U$ ist ja total geordnet. Falls $i-$ bzw. $i+$ undefiniert sind, so setzen wir $w(i-) = \infty$ bzw. $w(i+) = \infty$.

Weiterhin sei $W$ das Gesamtgewicht aller an einer Wörterbuch-Operation beteiligten Knoten.

## Satz 60

*Für die amortisierten Kosten der Wörterbuch-Operationen in Splay-Trees gelten die folgenden oberen Schranken ($T,\ T_1,\ T_2 \neq \emptyset$):*

$$\mathit{Access}(i,T): \begin{cases} 3\log\left(\frac{W}{w(i)}\right) + \mathcal{O}(1), & \text{falls } i \in T \\ 3\log\left(\frac{W}{\min\{w(i^-),\ w(i^+)\}}\right) + \mathcal{O}(1), & \text{falls } i \notin T \end{cases}$$

$$\mathit{Split}(i,T): \begin{cases} 3\log\left(\frac{W}{w(i)}\right) + \mathcal{O}(1), & \text{falls } i \in T \\ 3\log\left(\frac{W}{\min\{w(i^-),\ w(i^+)\}}\right) + \mathcal{O}(1), & \text{falls } i \notin T \end{cases}$$

## Satz 60

*Für die amortisierten Kosten der Wörterbuch-Operationen in Splay-Trees gelten die folgenden oberen Schranken ($T,\ T_1,\ T_2 \neq \emptyset$):*

$$\textit{Join}(T_1, T_2) : 3\log\left(\frac{W}{w(i)}\right) + \mathcal{O}(1),\ i \text{ maximal in } T_1$$

$$\underset{i \notin T}{\textit{Insert}}(i, T) : 3\log\left(\frac{W - w(i)}{\min\{w(i^-), w(i^+)\}}\right) + \log\left(\frac{W}{w(i)}\right) + \mathcal{O}(1)$$

$$\underset{i \in T,}{\textit{Delete}}(i, T) : 3\log\left(\frac{W}{w(i)}\right) + 3\log\left(\frac{W - w(i)}{w(i^-)}\right) + \mathcal{O}(1),$$

*falls $i$ nicht minimal in $T$*