Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Wintersemester 2006/2007
Übungsblatt 11
12. Januar 2007

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 19.01.2007 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder Baum $G = (V, E)$ mit endlich vielen Knoten mindestens einen Knoten $v \in V$ mit Grad $\deg(v) = 1$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann ein Baum ist, wenn es zwischen je zwei Knoten genau einen einfachen Pfad gibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* genannt, wenn es zwei Mengen V_1 und V_2 mit $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gibt, so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $u \in V_2$ und $v \in V_1$ gilt.

Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der entscheidet, ob ein gegebener Graph bipartit ist und analysieren Sie seine Laufzeit.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter einfacher Graph, w eine Gewichtsfunktion auf E. Seien weiter T und T' zwei Spannbäume von G, für die es Kanten e und e' aus E gibt, so daß $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Wir sagen, dass T' aus T durch einen *einfachen Kantentausch* hervorgeht.

Seien nun T und $\tilde{T}$ zwei verschiedene minimale Spannbäume von G. Zeigen Sie, dass es Spannbäume $T_1, T_2, \ldots, T_k$ gibt, so dass $T = T_1$, $\tilde{T} = T_k$, T_{i+1} für $i = 1, \ldots, k-1$ jeweils durch einfachen Kantentausch aus T_i hervorgeht und alle T_i ebenfalls minimale Spannbäume von G sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Veranschaulichen Sie die Arbeitsweise des Algorithmus von Kruskal und des Algorithmus von Prim (erste Variante beginnend im Knoten h) an folgendem Graphen: