Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Übungsblatt 4
7. Mai 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 14. Mai 2007 **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, der eine Sprache L über Σ erkennt.

1. Geben Sie eine Grammatik G' an, die $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ erzeugt.
2. Wir definieren die Spiegelung w^R eines Wortes $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ durch $w^R = x_n \ldots x_2 x_1$. Insbesondere gilt $\epsilon^R = \epsilon$.

   Geben Sie einen DFA A' an, der die Sprache $L^R = \{w^R\,;\, w \in L\}$ erkennt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Ein Wort w nennt man Palindrom, wenn für das gespiegelte Wort w^R gilt $w^R = w$ (Definition von w^R wie vorausgegangen). Sei P die Menge aller Palindrome über Σ.

1. Geben Sie eine Grammatik G' an, die P erzeugt.
2. Beweisen Sie, dass $L(G') = P$ gilt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Auswertung von Polynomen $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a^i x^i$ vom Grad $n \geq 0$ für bestimmte x nach dem Horner-Algorithmus $p_i := p_{i-1}x + a_{n-i}$ für $i = 0, \ldots, n$ mit $p_{-1} = 0$ liefert $p_n = p(x)$.

1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie unter Verwendung von Operationen modulo k einen Algorithmus auf der Basis des Horner-Algorithmus an, der für eine in Binärdarstellung gegebene natürliche Zahl $y = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ und $a_n = 1$ entscheidet, ob y durch k teilbar ist!
2. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Binärdarstellungen (ohne führende Nullen) von natürlichen Zahlen, die durch $k = 5$ teilbar sind. Beweisen Sie, dass L eine reguläre Sprache ist!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache L über dem Alphabet $\{0, 1\}$, die durch den regulären Ausdruck $[1(0|1)^*1] \,|\, [0(1|0)^*0]$ gegeben ist.

1. Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen Automaten A, der L akzeptiert.
2. Konstruieren Sie mit der Teilmengenkonstruktion ausgehend von A einen deterministischen Automaten A', der $L(A)$ erkennt. Geben Sie diesen DFA sowohl durch die Zustandsübergangstabelle als auch als Graph an.

***Hinweis:** Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei L eine Sprache über Σ. Zeigen Sie, dass die durch

$$x \equiv_L y \Longleftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*)[xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$$

gegebene Relation über Σ^* rechtsinvariant ist, d. h., dass für alle $u \in \Sigma^*$ gilt

$$x \equiv_L y \Rightarrow xu \equiv_L yu\,.$$

Vorbereitung 2

Wir bezeichnen eine Grammatik G als separiert, wenn für jede Regel $\alpha \to \beta$ von G entweder $\alpha, \beta \in V^+$ oder $\alpha \in V, \beta \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ gilt. Wir betrachten die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit den folgenden Regeln in BNF-Form

$$\begin{array}{lcl} S & \to & Z \mid \epsilon, \\ X & \to & aXZ \mid aX \mid a \\ Y & \to & ZbZ \mid Zb \mid bZ \mid X \mid b \mid bb \\ Z & \to & XYZ \mid XY \end{array}$$

Geben Sie eine kontextfreie, separierte Grammatik G' an, die $L(G)$ erzeugt.

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei der deterministische endliche Automat
$A = (\{0,1,2,3,4,5,6\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{6\})$ mit folgender Übergangsfunktion δ:

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
0	1	0
1	4	5
2	2	2
3	1	3

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
4	6	3
5	6	0
6	6	2

Konstruieren Sie einen zu A äquivalenten DFA mit einer für $L(A)$ minimalen Anzahl von Zuständen.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten wieder die Grammatik G aus der Vorbereitungsaufgabe 2.
Geben Sie eine Grammatik in Chomsky-Normalform an, die $L(G)$ erzeugt!