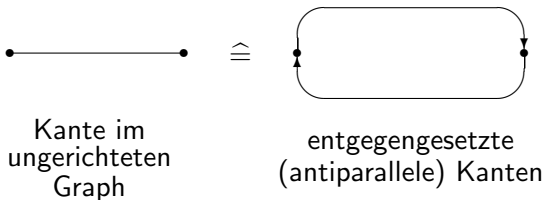


Kapitel V Kürzeste Pfade

1. Grundlegende Begriffe

Betrachte Digraph $G = (V, A)$ oder Graph $G = (V, E)$.



Distanzfunktion: $d : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ (bzw. $\longrightarrow \mathbb{R}$)

O.B.d.A.: $A = V \times V$, $d(x, y) = +\infty$ für Kanten, die eigentlich nicht vorhanden sind.

$\text{dis}(v, w) :=$ Länge eines kürzesten Pfades von v nach w
 $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Arten von Kürzeste-Pfade-Problemen:

- 1 single-pair-shortest-path (**spsp**). Beispiel: Kürzeste Entfernung von München nach Frankfurt.
- 2 single-source-shortest-path: gegeben G , d und $s \in V$, bestimme für alle $v \in V$ die Länge eines kürzesten Pfades von s nach v (bzw. einen kürzesten Pfad von s nach v) (**sssp**).
Beispiel: Kürzeste Entfernung von München nach allen anderen Großstädten.
- 3 all-pairs-shortest-path (**apsp**). Beispiel: Kürzeste Entfernung zwischen allen Großstädten.

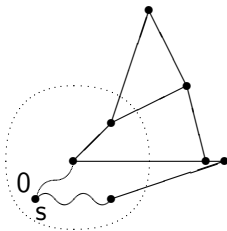
Bemerkung: Wir kennen keinen Algorithmus, der das single-pair-shortest-path berechnet, ohne nicht gleichzeitig (im worst-case) das single-source-shortest-path-Problem zu lösen.

2. Das single-source-shortest-path-Problem

Zunächst nehmen wir an, dass $d \geq 0$ ist. Alle kürzesten Pfade von a nach b sind o.B.d.A. einfache Pfade.

2.1 Dijkstra's Algorithmus

Gegeben: $G = (V, A)$, ($A = V \times V$),
Distanzfunktion $d : A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,
Startknoten s , G durch Adjazenzlisten dargestellt.



algorithm sssp:=

$S := \{s\}$; $\text{dis}[s] := 0$; initialisiere eine Priority Queue PQ , die alle Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ enthält mit Schlüssel $\text{dis}[v] := d(s, v)$

for alle $v \in V - \{s\}$ **do** $\text{from}[v] := s$ **od**

while $S \neq V$ **do**

$v := \text{ExtractMin}(PQ)$

$S := S \cup \{v\}$

for alle $w \in V \setminus S$, $d(v, w) < \infty$ **do**

if $\text{dis}[v] + d(v, w) < \text{dis}[w]$ **then**

$\text{DecreaseKey}(w, \text{dis}[v] + d(v, w))$

co DecreaseKey aktualisiert $\text{dis}[w]$ **oc**

$\text{from}[w] := v$

fi

od

od

Seien $n = |V|$ und $m =$ die Anzahl der wirklichen Kanten in G .
Laufzeit (mit Fibonacci-Heaps):

Initialisierung:	$\mathcal{O}(n)$
<i>ExtractMin</i> :	$n \cdot \mathcal{O}(\log n)$
Sonstiger Aufwand:	$m \cdot \mathcal{O}(1)$ (z.B. <i>DecreaseKey</i>)

⇒ Zeitbedarf also: $\mathcal{O}(m + n \log n)$

Korrektheit: Wir behaupten, dass in dem Moment, in dem ein $v \in V \setminus \{s\}$ Ergebnis der *ExtractMin* Operation ist, der Wert $\text{dis}[v]$ des Schlüssels von v gleich der Länge eines kürzesten Pfades von s nach v ist.

Beweis:

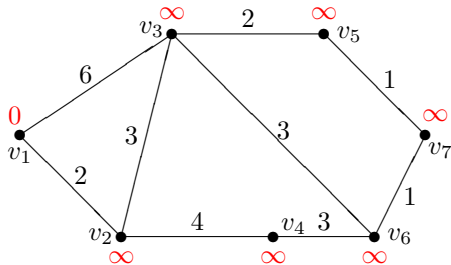
[durch Widerspruch] Sei $v \in V \setminus \{s\}$ der erste Knoten, für den diese Behauptung nicht stimmt, und sei



ein kürzester Pfad von s nach v , mit einer Länge $< \text{dis}[v]$. Dabei sind $s_1, \dots, s_r \in S$, $v_1 \notin S$ [$r = 0$ und/oder $q = 0$ ist möglich].

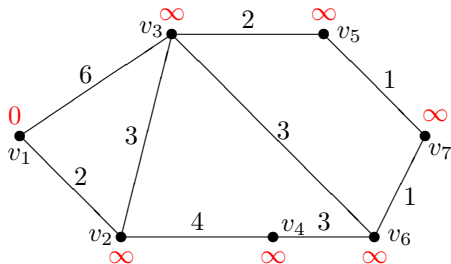
Betrachte den Pfad $s \xrightarrow{s_1} \dots \xrightarrow{s_r} v_1$; seine Länge ist $< \text{dis}[v]$, für $q \geq 1$ (ebenso für $q = 0$) ist also $\text{dis}[v_1] < \text{dis}[v]$, im Widerspruch zur Wahl von v . □

Beispiel 108 (Dijkstra's Algorithmus)

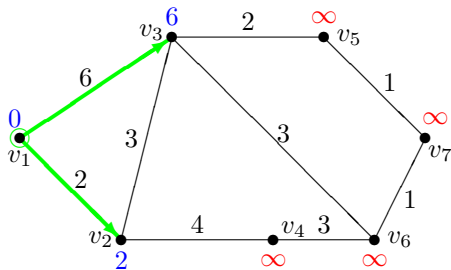


gegeben Graph G ;
 v_1 ist der Startknoten;
setze v_1 als Bezugsknoten;
setze $\text{dis}[v_1] = 0$;
setze $\text{dis}[\text{Rest}] = +\infty$;

Beispiel 108 (Dijkstra's Algorithmus)

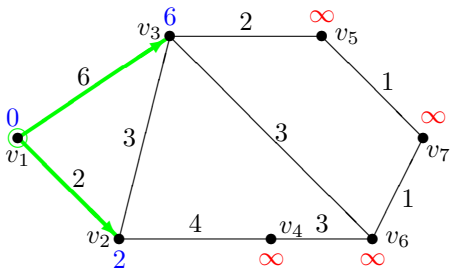


gegeben Graph G ;
 v_1 ist der Startknoten;
setze v_1 als Bezugsknoten;
setze $dis[v_1] = 0$;
setze $dis[Rest] = +\infty$;

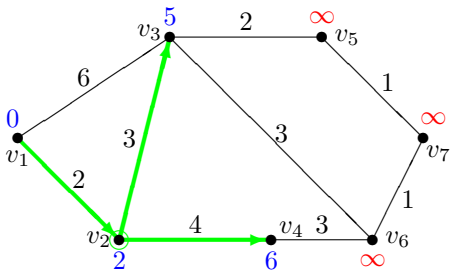


setze $dis[v_2] = 2$;
markiere (v_1, v_2);
setze $dis[v_3] = 6$;
markiere (v_1, v_3);
setze v_2 als Bezugsknoten,
da $dis[v_2]$ minimal;

Beispiel 108 (Dijkstra's Algorithmus)

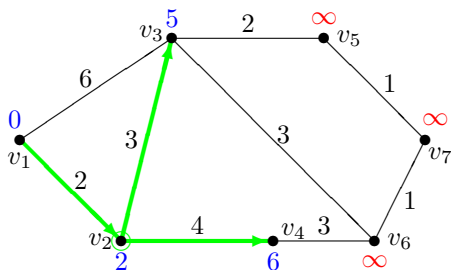


setze $\text{dis}[v_2] = 2$;
 markiere (v_1, v_2) ;
 setze $\text{dis}[v_3] = 6$;
 markiere (v_1, v_3) ;
 setze v_2 als Bezugsknoten,
 da $\text{dis}[v_2]$ minimal;

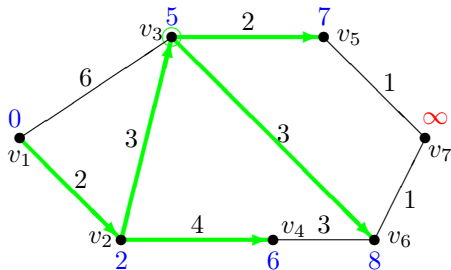


setze $\text{dis}[v_3] = 2 + 3 = 5$;
 markiere (v_2, v_3) ;
 unmarkiere (v_1, v_3) ;
 setze $\text{dis}[v_4] = 2 + 4 = 6$;
 markiere (v_2, v_4) ;
 setze v_3 als Bezugsknoten,
 da $\text{dis}[v_3]$ minimal;

Beispiel 108 (Dijkstra's Algorithmus)

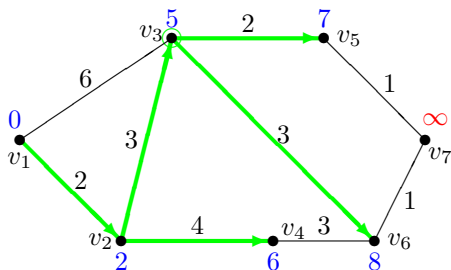


setze $\text{dis}[v_3] = 2 + 3 = 5$;
 markiere (v_2, v_3) ;
 unmarkiere (v_1, v_3) ;
 setze $\text{dis}[v_4] = 2 + 4 = 6$;
 markiere (v_2, v_4) ;
 setze v_3 als Bezugsknoten,
 da $\text{dis}[v_3]$ minimal;

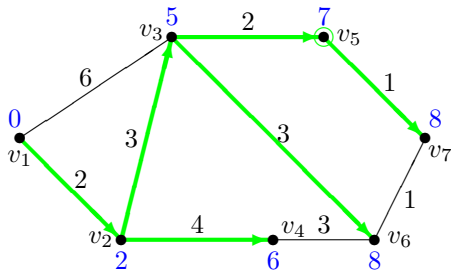


setze $\text{dis}[v_5] = 5 + 2 = 7$;
 markiere (v_3, v_5) ;
 setze $\text{dis}[v_6] = 5 + 3 = 8$;
 markiere (v_3, v_6) ;
 setze v_4 , dann v_5
 als Bezugsknoten;

Beispiel 108 (Dijkstra's Algorithmus)



setze $\text{dis}[v_5] = 5 + 2 = 7$;
 markiere (v_3, v_5) ;
 setze $\text{dis}[v_6] = 5 + 3 = 8$;
 markiere (v_3, v_6) ;
 setze v_4 , dann v_5
 als Bezugsknoten;



setze $\text{dis}[v_7] := 7 + 1 = 8$;
 markiere (v_5, v_7) ;
 alle Knoten wurden erreicht:
 \Rightarrow Algorithmus zu Ende

Beobachtung:

- *ExtractMin* liefert eine (schwach) monoton steigende Folge von Schlüsseln $\text{dis}[\cdot]$;
- Die Schlüssel $\neq \infty$ in PQ sind stets $\leq \text{dis}[v] + C$, wobei v das Ergebnis der vorangehenden *ExtractMin*-Operation (bzw. s zu Beginn) und $C := \max_{(u,w) \in A} \{\text{dis}(u, w)\}$ ist.


Satz 109

Dijkstra's Algorithmus (mit Fibonacci-Heaps) löst das single-source-shortest-path-Problem in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$.

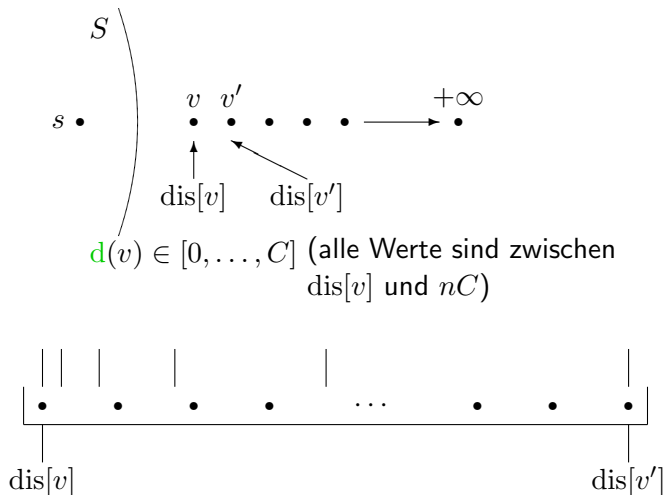
Bemerkungen:

- 1 Verwendet man Dijkstra's Algorithmus mit d -Heaps, so erhält man Laufzeit

$$\mathcal{O}(m \log_{2+\frac{m}{n}} n)$$

- 2  **Mikkel Thorup:**
Undirected single-source shortest paths with positive integer weights in linear time
J. ACM **46**(3), pp. 362–394 (1999)

2.2 Dijkstra's Algorithmus mit Radix-Heaps



Wir verwenden Radix-Heaps (siehe [dort](#)), in der einstufigen Variante wie vorgestellt.

Satz 110

Dijkstra's Algorithmus mit einstufigen Radix-Heaps hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(m + n \log C)$.

Beweis:

siehe Satz [72](#).



Verbesserungen:

① **zweistufige** Heaps: $\mathcal{O}(m + n \cdot \frac{\log C}{\log \log C})$

② **mehrstufige** Heaps (+Fibonacci-Heaps): $\mathcal{O}(m + n\sqrt{\log C})$



R.K. Ahuja, Kurt Mehlhorn, J.B. Orlin, R.E. Tarjan:

Faster Algorithms for the Shortest Path Problem

J.ACM **37**, pp. 213–223 (1990)

2.3 Bellman-Ford-Algorithmus

Wir setzen (zunächst) wiederum voraus:

$$d \geq 0 .$$

Dieser Algorithmus ist ein Beispiel für **dynamische Programmierung**.

Sei $B_k[i] :=$ Länge eines kürzesten Pfades von s zum Knoten i , wobei der Pfad höchstens k Kanten enthält.

Gesucht ist $B_{n-1}[i]$ für $i = 1, \dots, n$ (o.B.d.A. $V = \{1, \dots, n\}$).

Initialisierung:

$$B_1[i] := \begin{cases} d(s, i) & , \text{ falls } d(s, i) < \infty, i \neq s \\ 0 & , \text{ falls } i = s \\ +\infty & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Iteration:

for $k := 2$ **to** $n - 1$ **do**

for $i := 1$ **to** n **do**

$$B_k[i] := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i = s \\ \min_{j \in N^{-1}(i)} \{ B_{k-1}[i], B_{k-1}[j] + d(j, i) \} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

od

od

Bemerkung: $N^{-1}(i)$ ist die Menge der Knoten, von denen aus eine Kante zu Knoten i führt.

Korrektheit:

klar (Beweis durch vollständige Induktion)

Zeitbedarf:

Man beachte, dass in jedem Durchlauf der äußeren Schleife jede Halbkante einmal berührt wird.

Satz 111

Der Zeitbedarf des Bellman-Ford-Algorithmus ist $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Beweis:

s.o.



3. Floyd's Algorithmus für das all-pairs-shortest-path-Problem

Dieser Algorithmus wird auch als „Kleene's Algorithmus“ bezeichnet. Er ist ein weiteres Beispiel für **dynamische Programmierung**.

Sei $G = (V, E)$ mit Distanzfunktion $d : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Sei o.B.d.A. $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Wir setzen nun

$c_{ij}^k :=$ Länge eines kürzesten Pfades von v_i nach v_j , der als innere Knoten (alle bis auf ersten und letzten Knoten) nur Knoten aus $\{v_1, \dots, v_k\}$ enthält.

algorithm floyd:=

for alle (i, j) **do** $c_{ij}^{(0)} := d(i, j)$ **od** **co** $1 \leq i, j \leq n$ **oc**

for $k := 1$ **to** n **do**

for alle $(i, j), 1 \leq i, j \leq n$ **do**

$c_{ij}^{(k)} := \min \left\{ c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)} \right\}$

od

od

Laufzeit: $\mathcal{O}(n^3)$

Korrektheit:

Zu zeigen: $c_{ij}^{(k)}$ des Algorithmus = c_{ij}^k (damit sind die Längen der kürzesten Pfade durch $c_{ij}^{(n)}$ gegeben).

Beweis:

Richtig für $k = 0$. Induktionsschluss: Ein kürzester Pfad von v_i nach v_j mit inneren Knoten $\in \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ enthält entweder v_{k+1} gar nicht als inneren Knoten, oder er enthält v_{k+1} genau einmal als inneren Knoten. Im ersten Fall wurde dieser Pfad also bereits für $c_{ij}^{(k)}$ betrachtet, hat also Länge = $c_{ij}^{(k)}$. Im zweiten Fall setzt er sich aus einem kürzesten Pfad P_1 von v_i nach v_{k+1} und einem kürzesten Pfad P_2 von v_{k+1} nach v_j zusammen, wobei alle inneren Knoten von P_1 und $P_2 \in \{v_1, \dots, v_k\}$ sind. Also ist die Länge des Pfades = $c_{i,k+1}^{(k)} + c_{k+1,j}^{(k)}$. □

Satz 112

Floyd's Algorithmus für das all-pairs-shortest-path-Problem hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(n^3)$.