
Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 25.01.2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Satz 9.10 Für alle deterministischen Online-Algorithmen (für das Paging-Problem) A gilt, dass A c -kompetitiv für $c \geq k$ ist.

Beweisen Sie diesem Satz.

Aufgabe 2

Gegeben sei das Ski-Problem mit Leihkosten 1 und Kaufkosten $B \in \mathbb{N}$, $2|B$. Für einen randomisierten Online-Algorithmus A bezeichne p_i die Wahrscheinlichkeit, dass am i -ten Tag die Ski gekauft werden. Zeigen Sie für das Ski-Ausleihe-Problem, dass für jeden c -kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus A gegen den blinden Gegner $c \geq \frac{6}{5}$ gilt.

Hinweis: Untersuchen Sie getrennt die Fälle $\sum_{i=1}^{\frac{B}{2}} p_i \geq \frac{1}{5}$ und $\sum_{i=1}^{\frac{B}{2}} p_i < \frac{1}{5}$. Geben Sie in jedem Fall eine Länge der Eingabe an, durch welche der kompetitive Faktor so hoch wie möglich wird.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Erweiterung SEVEN-DOWN des BIT-Algorithmus aus der Vorlesung:

Sei $S = \{1, 3, 5\}$. Für jedes Listenelement x wird ein Zustandswert $s(x) \in \{0, 1, \dots, 6\}$ gehalten, der anfangs unabhängig und zufällig gemäß Gleichverteilung mit einem Wert aus $\{0, 1, \dots, 6\}$ initialisiert wird. Bei jeder Anfrage an x wird $s(x)$ um 1 gesenkt; $s_{neu}(x) = (s_{alt}(x) - 1) \bmod 7$. Gilt $s_{neu}(x) \in S$, so wird x an den Kopf der Liste bewegt, andernfalls wird die Listenposition nicht geändert.

Zeigen Sie, dass SEVEN-DOWN $\frac{85}{49}$ -kompetitiv gegen den blinden Gegner ist. Verwenden Sie hierbei die Ideen aus dem Beweis von BIT.