

---

## Algorithmen für die Speicherhierarchie

---

Abgabetermin: 13.5.2009 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde auf die Komplexität der Berechnung  $z = y^T Ax$  mit einer  $N_x \times N_y$ -Bandmatrix  $A$  hingewiesen, welche genau  $h$  Einträge ungleich Null beinhaltet. Diese soll nun genauer erörtert werden. In einer Bandmatrix existiert nur ein zusammenhängendes Band an von Null verschiedenen Einträgen. Formal heißt dies, dass für die Einträge  $a_{ij}$  von  $A$  für alle  $i, j$  gelten muss

$$\begin{aligned} a_{ij} = 1 \wedge a_{ik} = 1 &\Rightarrow \forall j \leq l \leq k : a_{il} = 1 \\ a_{ij} = 1 \wedge a_{kj} = 1 &\Rightarrow \forall i \leq l \leq k : a_{lj} = 1. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber gehen wir zunächst davon aus, dass  $A$  nur Einträge der Form 0 oder 1 beinhaltet und diese von einem Orakel gegeben werden. Es werden also ausschließlich I/O-Anfragen für das Laden der Vektoreinträge aus  $x$  und  $y$  benötigt. Bei dem in der Vorlesung beschriebenen Vorgehen wird die Matrix  $A$  in Spalten der Größe  $M' = M - 2B$  eingeteilt, wobei die Einträge jeder dieser Meta-Spalten zeilenweise bearbeitet werden. Für diesen Algorithmus soll nun eine obere Schranke für die I/O-Komplexität bestimmt werden.

- Wieviele Zugriffe auf die Einträge im Vektor  $x$  sind bei diesem Vorgehen maximal nötig? Wieviele Zugriffe auf  $y$  werden für die Berechnung der elementaren Produkte  $x_i \cdot y_j$  in einer  $M \times B$ -Kachel der Matrix höchstens benötigt?
- Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Kacheln  $A$ , welche bei der Berechnung von  $z$  betrachtet werden müssen:
  - Wieviele Kacheln existieren maximal, die komplett mit 1-Einträgen gefüllt sind?
  - Wieviele Kacheln gibt es höchstens, welche nur teilweise gefüllt sind?  
*Hinweis:* Hierbei sollte man zwischen Kacheln am oberen Rand und solchen am unteren Rand des Bandes unterscheiden
- Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Berechnung von  $z = y^T Ax$  an.
- Die Annahme eines Orakels kann motiviert werden, wenn bereits aus den Vektoreinträge bestimmt werden kann, ob diese in  $z$  einfließen. So könnte ein Produkt  $x_i \cdot y_j$  nur dann in  $z$  vorkommen, wenn  $x_i$  und  $y_j$  in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen.

Wie verhält sich die obere Schranke für den Fall  $a_{ij} = 1$  genau dann, wenn  $|x_i - y_j| \leq m$  für ein  $m > 0$ ,  $a_{ij} = 0$  sonst, für sortierte  $x$  und  $y$  Vektoren?

## Aufgabe 2 (10 Punkte)

Als nächstes soll die Multiplikation zweier  $N \times N$  Bandmatrizen  $A$  und  $B$  analysiert werden. Für beide Matrizen gelte, dass nur Einträge an den Positionen  $i, j$  mit  $|i - j| \leq k$  von Null verschiedene Werte enthalten. Es lässt sich zeigen, dass die Matrix  $C = A \cdot B$  ebenfalls eine Bandmatrix mit höchstens der doppelten Bandbreite ist.

- a) Finden Sie ein passendes Layout in dem die Matrizen gespeichert werden sollen um die Multiplikation mit möglichst wenigen I/Os zu ermöglichen.
- b) Wieviele Kacheln der Matrix  $C$  müssen nach ihrem Layout höchstens berechnet werden?
- c) Bestimmen Sie möglichst genau die maximale Anzahl an Kacheln in  $A$  und  $B$ , welche für die Berechnung einer Kachel in  $C$  benötigt werden. Beachten Sie dabei die Bandbreite der Matrizen.
- d) Schätzen Sie mit den gewonnen Einsichten möglichst gut die I/O-Komplexität eines optimalen Algorithmus für Ihr Layout ab.

*Hinweis:* Die I/O-Komplexität eines optimaler Algorithmus sollte für  $k = N$  asymptotisch der des optimalen Algorithmus zur Multiplikation dicht besetzter Matrizen entsprechen, d.h.  $\mathcal{O}\left(\frac{N^3}{B\sqrt{M}}\right)$ .