5. Eine untere Schranke für die Medianbestimmung

Satz 89

Jeder (vergleichsbasierte) Medianalgorithmus benötigt im worst-case mindestens $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 2$ *Vergleiche.*

Beweis:

Gegenspielerargument (adversary argument)

n Elemente, o.B.d.A. n ungerade, alle Elemente paarweise verschieden. Die Menge aller Elemente wird in drei Teilmengen partitioniert: U enthält die Kandidaten für den Median, G enthält Elemente, die sicher größer als der Median sind, und L enthält Elemente, die sicher kleiner als der Median sind. Anfangs sind alle Elemente in U.

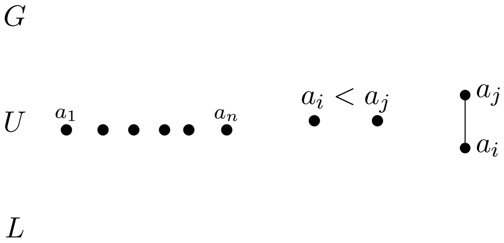
Beweis (Forts.):

Der Algorithmus stellt nun Fragen der Form $a_i < a_j$. Der Gegenspieler gibt konsistente Antworten, die den Algorithmus jedoch dazu zwingen, möglichst viele Fragen stellen zu müssen, bevor die Antwort feststehen kann(d.h. U soll möglichst ungeordnet bleiben).

Durch die (konsistenten!) Antworten des Gegenspielers auf die "$\stackrel{?}{<}$"-Queries des Algorithmus entsteht ein DAG. Der Gegenspieler hält diesen DAG "einfach", z.B. angenommen $y > z$ und $y > x$, dann soll y „sehr groß" sein $\Rightarrow y \rightarrow G$.

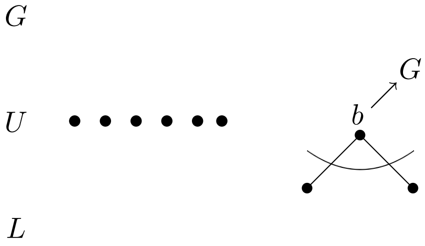
Strategie des Gegenspielers

Beweis (Forts.):



Strategie des Gegenspielers

Beweis (Forts.):

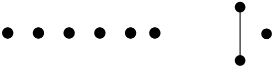


Strategie des Gegenspielers

Beweis (Forts.):

$G \quad \le \dfrac{n+1}{2} - 1$

U



Solange ein Element unverglichen ist, ist nicht klar, welches der Median ist.

$L \quad \le \dfrac{n+1}{2} - 1$

Beweis (Forts.):

Solange $|L|, |G| < \frac{n+1}{2}$, kann der Algorithmus annehmen, dass der Median in U ist. Solange U mindestens zwei unverglichene Elemente und keine Zusammenhangskomponente mit > 2 Elementen enthält, kann der Algorithmus den Median nicht bestimmen.

Strategie des Gegenspielers

Beweis (Forts.):

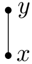
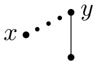
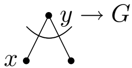
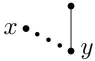
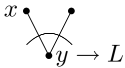
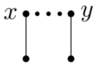
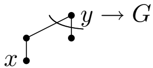
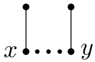
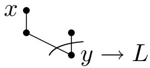
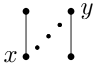
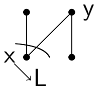
Die Strategie des Gegenspielers hat zwei Phasen.

Erste Phase: Query sei $x \stackrel{?}{<} y$:

i) $x, y \in G$ bzw. $x, y \in L$: irgendeine konsistente Antwort

ii) $x \in G \wedge y \in L \cup U$ (bzw. $x \in L \wedge y \in G \cup U$):
Antwort: $y < x$ (bzw. $x < y$).

iii) Sei $x, y \in U$.

	Query	Antwort des Gegenspielers	Anzahl der Paare in U	$\|U\|$	$\|L\|$	$\|G\|$
1.			$+1$	—	—	—
2.			-1	-1	0	$+1$
3.			-1	-1	$+1$	0
4.			-1	-1	0	$+1$
5.			-1	-1	$+1$	0
6.			-1	-1	$+1$	0

Die erste Phase endet, wenn $|L| = \frac{n-1}{2}$ oder $|G| = \frac{n-1}{2}$. Während der Phase 1 enthält U mindestens zwei (in U) maximale und mindestens zwei (in U) minimale Elemente (bzgl. des DAGs). $\Rightarrow$ Während Phase 1 kann der Algorithmus den Median mit Sicherheit nicht bestimmen.

Der Gegenspieler beginnt mit Phase 2, sobald

$$|L| \text{ wird } \frac{n-1}{2} \text{ oder } |G| \text{ wird } \frac{n-1}{2}.$$

O.B.d.A.:

$$|L| = \frac{n-1}{2}$$

Der Gegenspieler zwingt nun den Algorithmus, das minimale Element in U bzgl. der gesamten totalen Ordnung zu bestimmen (da dieses unter den Vorgaben der Median ist).

Beweis (Forts.):

Laufzeitanalyse:

$C :=$ Anzahl der Vergleiche

$P :=$ Anzahl der Paare in U

i) In der Phase 1 gilt folgende Invariante: $C - P + 2|U| \geq 2n$.
Dies wird durch vollständige Induktion gezeigt:
Induktionsanfang: $0 - 0 + 2n \geq 2n$;
Induktionsschritt: Gemäß der Tabelle.

ii) Sei C die Anzahl der Vergleiche am Ende der Phase 1. In der Phase 2 werden noch $\geq |U| - 1 - |P|$ Vergleiche nötig. Die Anzahl der Vergleiche für alle Phasen ist damit

$$\geq C + |U| - 1 - |P| .$$

Beweis (Forts.):

Am Ende der Phase 1 gilt ja $C \geq 2n + |P| - 2|U|$ (wg. Invariante). Damit gilt für die Anzahl der Vergleiche:

$$
\begin{aligned}
\geq 2n + |P| - 2|U| + |U| - 1 - |P| &= 2n - |U| - 1 \\
&\geq \frac{3}{2}n - \frac{3}{2} = \\
&= \left\lceil \frac{3}{2}n - 2 \right\rceil, \text{ da } |U| \leq \frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

6. Eine bessere untere Schranke

Satz 90

Sei T ein Entscheidungsbaum für die Bestimmung des i-kleinsten von n verschiedenen Elements, mit $i^2 \geq \log\left[\binom{n}{i}\frac{1}{n-i+1}\right] + 3$. Dann gilt, wenn

$$p := 2\sqrt{\log\left[\binom{n}{i}\frac{1}{n-i+1}\right] + 3} - 2$$

gesetzt wird,

$$\textit{Höhe}(T) \geq \log\left[\binom{n}{i}\frac{2^{n-p}}{n-i+1}\right].$$

Bemerkung: $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \to \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \Theta(\frac{2^n}{\sqrt{n}})$; also erhalten wir eine untere Schranke von Höhe$(T) \geq 2n - o(n)$ für die Bestimmung des Medians.

Beweis:

Der Beweis setzt sich aus einem Gegenspieler- und einem Abzählargument zusammen, um zu zeigen

„T hat viele Blätter.“

Sei A Teilmenge der Schlüssel, $|A| = i$. Wir konstruieren einen Teilbaum T_A von T, so dass alle Blätter von T_A auch Blätter von T sind, und zeigen: T_A hat viele Blätter (nämlich 2^{n-p}). Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten, A zu wählen, jedes Blatt von T kommt in höchstens $n - i + 1$ T_A's vor.

Beweis (Forts.):

Beobachtungen:

Jedes Blatt w von T liefert folgende Informationen:

$$\begin{array}{lll}
\text{answer}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & i\text{-kleinstes Element } x \\
\text{little}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & i-1 \text{ Elemente } < x \\
\text{big}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & n-i \text{ Elemente } > x
\end{array}$$

Beweis (Forts.):

Wähle A als beliebige Teilmenge der n gegebenen Schlüssel, mit $|A| = i$. Wir geben für den Gegenspieler eine Strategie an, welche dazu führt, dass wir durch Zurechtschneiden aus T einen Baum T_A konstruieren können, so dass gilt:

- T_A ist Binärbaum
- jedes Blatt von T_A ist auch Blatt von T, d.h. durch das Zurechtschneiden entstehen keine zusätzlichen Blätter
- für jedes Blatt w von T_A gilt: little$(w) \subset A$

Beweis (Forts.):

Setze $\bar{A}$ gleich dem Komplement von A, sowie

$$r := \sqrt{\log\left[\binom{n}{i}\frac{1}{n-i+1}\right] + 3}$$
$$s := r - 1$$

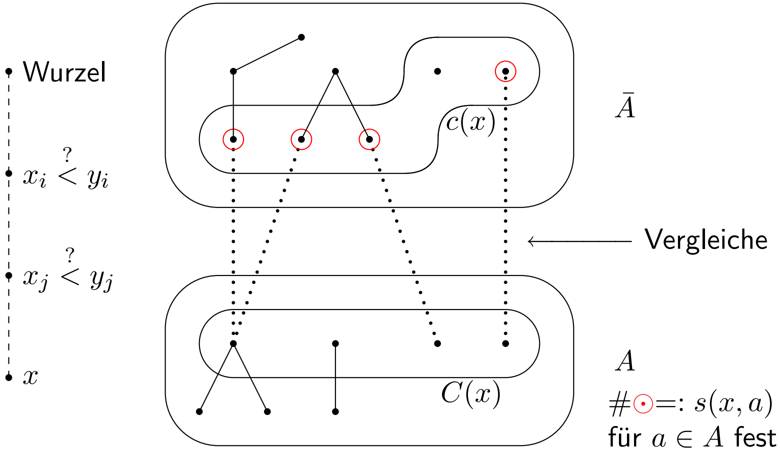
Damit gilt: $p = r + s - 1$.

Die Konstruktion (das "Zurechtstutzen") von T zu T_A erfolgt in zwei Phasen.

Beweis (Forts.):

Erste Phase: Breitensuche von der Wurzel nach unten.
Betrachte Knoten x. Definiere:

- $C(x)$ sind die Elemente $a \in A$, für die es kein $b \in A$ und keinen Knoten auf dem Pfad von der Wurzel von T zu x gibt, an dem a mit b mit dem Ergebnis $a < b$ verglichen wurde.
- $c(x)$ sind entsprechend die im Knoten x bekannten Minima in $\bar{A}$.
- $s(x, a)$ ist, für $a \in A$, die Anzahl der Elemente $\in c(x) \subseteq \bar{A}$, mit denen a auf dem Pfad von der Wurzel zu x verglichen wurde.


Wurzel
$x_i \overset{?}{<} y_i$
$x_j \overset{?}{<} y_j$
x
$c(x)$
$\bar{A}$
Vergleiche
$C(x)$
A
$\#\odot =: s(x,a)$
für $a \in A$ fest

Beweis (Forts.):

Regeln für Phase 1:

Seien a und b die Elemente, die im Knoten x verglichen werden.

1.1: Falls $a \in A$ und $b \in A$, behalte x in T_A bei.

1.2: Falls $a \in \bar{A}$ und $b \in \bar{A}$, behalte x in T_A bei.

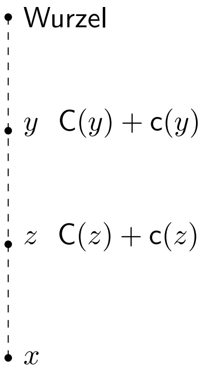
1.3: Sei nun o.B.d.A. $a \in A$ und $b \in \bar{A}$. Ersetze den Unterbaum in T mit Wurzel x mit dem Unterbaum, dessen Wurzel das Kind von x ist, das dem Ergebnis „$a < b$“ entspricht (d.h. lasse den Vergleich $a < b$ aus, da gemäß Strategie alle Elemente aus A kleiner als alle Elemente in $\bar{A}$ sind).

Phase 1 läuft, solange $|C(x)| \geq r$. Ein Knoten auf einem Pfad in T von der Wurzel, bei dem $|C(x)|$ erstmals $= r$ wird, heißt kritisch. Jeder Pfad in T von der Wurzel zu einem Blatt enthält genau einen kritischen Knoten.

Beweis (Forts.):

Betrachte in T_A einen Pfad von der Wurzel zu einem kritischen Knoten x. Sei y ein Knoten auf diesem Pfad, z sein Kind. Es gilt:

$$|C(z)| + |c(z)| \geq |C(y)| + |c(y)| - 1$$



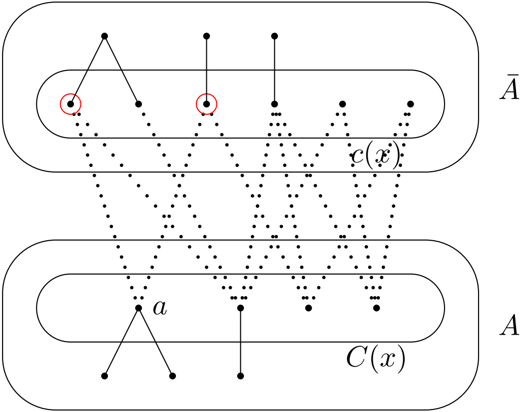
Da $|C(\text{Wurzel})| = |A| = i$ und $|c(\text{Wurzel})| = |\bar{A}| = n - i$, müssen überhalb eines jeden kritischen Knoten x mindestens

$$i - |C(x)| + n - i - |c(x)| = n - r - |c(x)|$$

Vergleiche erfolgen. Von jedem kritischen Knoten abwärts arbeitet der Gegenspieler nach einer Strategie für Phase 2. Sei x ein solcher kritischer Knoten. Dann ist $|C(x)| = r$.

Beweis (Forts.):

Phase 2: Sei $a \in C(x)$ ein Element mit minimalem $s(x, a)$.



$\# \odot = s(x, a)$
für $a \in A$

Beweis (Forts.):

Fall 1: $s(x,a) \geq s$. Betrachte irgendeinen Pfad von der Wurzel durch x zu einem Blatt w. Jeder solche Pfad muss mindestens $n-1$ Vergleiche enthalten, um answer(w) zu verifizieren: $\geq n-i$, für die answer(w) sich (direkt oder indirekt) als das kleinere Element ergibt, und $\geq i-1$, wo es sich als das größere ergibt. Damit sind $\geq (r-1)s$ Vergleiche redundant (nämlich alle die, die zwischen Elementen aus $C(x) \setminus \{\text{answer}(w)\}$ und Elementen in $\bar{A}$ erfolgt sind). Also:

$$\begin{aligned}
\text{Höhe}(T) &\geq n-1+s(r-1) = n-r-s-1+(s+1)r \\
&= n-r-s+1+1+\log\left[\frac{\binom{n}{i}}{n-i+1}\right] \\
&> \log\left[\binom{n}{i}\frac{2^{n-p}}{n-i+1}\right].
\end{aligned}$$

In diesem Fall folgt also die Behauptung direkt!