

Um $\mathbb{E}[X]$ empirisch zu ermitteln, bietet es sich an, aus den Zufallsvariablen X_i das arithmetische Mittel \bar{X} zu bilden, das definiert ist durch

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X].$$

\bar{X} liefert uns also im Mittel den gesuchten Wert $\mathbb{E}[X]$. Da wir \bar{X} zur Bestimmung von $\mathbb{E}[X]$ verwenden, nennen wir \bar{X} einen **Schätzer** für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$. Wegen der obigen Eigenschaft ist \bar{X} sogar ein so genannter **erwartungstreuer** Schätzer.

Definition 120

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichte $f(x; \theta)$. Eine **Schätzvariable** oder kurz **Schätzer** für den Parameter θ der Dichte von X ist eine Zufallsvariable, die aus mehreren (meist unabhängigen und identisch verteilten) Stichprobenvariablen zusammengesetzt ist. Ein Schätzer U heißt **erwartungstreu**, wenn gilt

$$\mathbb{E}[U] = \theta.$$

Bemerkung:

Die Größe $\mathbb{E}[U - \theta]$ nennt man **Bias** der Schätzvariablen U . Bei erwartungstreuen Schätzvariablen ist der Bias gleich Null.

Der Schätzer \bar{X} ist also ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert von X . Ein wichtiges Maß für die Güte eines Schätzers ist die mittlere quadratische Abweichung, kurz **MSE** für **mean squared error** genannt. Diese berechnet sich durch $MSE := \mathbb{E}[(U - \theta)^2]$. Wenn U erwartungstreu ist, so folgt $MSE = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}[U])^2] = \text{Var}[U]$.

Definition 121

Wenn die Schätzvariable A eine kleinere mittlere quadratische Abweichung besitzt als die Schätzvariable B , so sagt man, dass A **effizienter** ist als B .

Eine Schätzvariable heißt **konsistent im quadratischen Mittel**, wenn $MSE \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Hierbei bezeichne n den Umfang der Stichprobe.

Für \bar{X} erhalten wir wegen der Unabhängigkeit von X_1, \dots, X_n

$$\begin{aligned}MSE &= \text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{1}{n} \text{Var}[X].\end{aligned}$$

Bei jeder Verteilung mit endlicher Varianz folgt $MSE = \mathcal{O}(1/n)$ und somit $MSE \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Der Schätzer \bar{X} ist also konsistent.

Aus der Konsistenz von \bar{X} im quadratischen Mittel können wir mit Hilfe des Satzes von Chebyshev (siehe Satz 61) folgende Konsequenz ableiten. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\Pr[|\bar{X} - \theta| \geq \varepsilon] = \Pr[|\bar{X} - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}]}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Für genügend große n liegen also die Werte von \bar{X} beliebig nahe am gesuchten Wert $\theta = \mathbb{E}[X]$. Diese Eigenschaft nennt man auch **schwache Konsistenz**, da sie aus der Konsistenz im quadratischen Mittel folgt.

Als nächstes betrachten wir eine weitere von \bar{X} abgeleitete Schätzvariable:

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Wir zeigen, dass S^2 ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz von X ist. Sei $\mu := \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[\bar{X}]$.

$$\begin{aligned}(X_i - \bar{X})^2 &= (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (X_i - \mu)(X_j - \mu) \\ &= \frac{n-2}{n} (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j \neq i} (X_i - \mu)(X_j - \mu).\end{aligned}$$

Für je zwei unabhängige Zufallsvariablen X_i, X_j mit $i \neq j$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] &= \mathbb{E}[X_i - \mu] \cdot \mathbb{E}[X_j - \mu] \\ &= (\mathbb{E}[X_i] - \mu) \cdot (\mathbb{E}[X_j] - \mu) = 0 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] &= \frac{n-2}{n} \cdot \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] + \mathbb{E}[(\mu - \bar{X})^2] \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \text{Var}[X_i] + \text{Var}[\bar{X}].\end{aligned}$$

Wegen $\text{Var}[X_i] = \text{Var}[X]$ und $\text{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\text{Var}[X]$ folgt nun

$$\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X],$$

und somit gilt für S^2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S^2] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X].\end{aligned}$$

S^2 ist also eine erwartungstreue Schätzvariable für die Varianz von X .

Die vorangegangene Rechnung erklärt, warum man als Schätzer nicht

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \neq S^2$$

verwendet, wie man vielleicht intuitiv erwarten würde.

Definition 122

Die Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ und } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

heißen **Stichprobenmittel** bzw. **Stichprobenvarianz** der Stichprobe X_1, \dots, X_n . \bar{X} und S^2 sind erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert bzw. die Varianz.