# Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen


Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München


Wintersemester 2010/11

# Übersicht

# Das Assignment Problem

Maximum Matching Problem:

- gegeben: bipartiter Graph
- gesucht: Matching maximaler Kardinaliät
- davon kann es aber mehrere gegeben
- manche werden gegenüber anderen bevorzugt

$\Rightarrow$ Assigment Problem:

- gegeben: [vollständiger] bipartiter Graph mit Kantengewichten (Kosten)
- gesucht: Matching maximaler Kardinaliät mit minimalen Kosten

# Das Assignment Problem

- Beispielanwendung: Zuordnung $n$ Arbeiter $\leftrightarrow$ $n$ Jobs
- gegeben: Eignung $r_{ij}$ von Arbeiter $i$ für Job $j$ (z.B. als Matrix)
- gesucht: Zuordnung Arbeiter $\leftrightarrow$ Jobs mit maximaler Gesamteignung

$\Rightarrow$ $n$! Möglichkeiten der Zuordnung

- entspricht der Suche nach $n$ unabhängigen Elementen der Matrix mit maximaler Summe
  unabhängig: keine zwei Einträge auf einer Linie (Zeile/Spalte)
- Sei $r = \max_{i,j} r_{ij}$ und $x_{ij} = r - r_{ij}$.

$\Rightarrow$ Maximierungsproblem für $r_{ij}$ entspricht Minimierungsproblem für $x_{ij}$

- andere Beispielanwendung: Zuordnung $n$ Jobs $\leftrightarrow$ $n$ Maschinen
- gegeben: Kosten $x_{ij}$ von Job $i$ auf Maschine $j$
- gesucht: Zuordnung Jobs $\leftrightarrow$ Maschinen mit minimalen Kosten

# Grundlage

- basiert auf den Arbeiten von D. Kőnig und E. Egerváry
- 1955: Vorschlag der "Ungarischen Methode" durch H. W. Kuhn
- 1957: Verbesserung durch J. Munkres

### Satz (Kőnig)

*Sei m die maximale Anzahl unabhängiger Nulleinträge in einer Matrix A, dann gibt es m Linien, die alle Nulleinträge enthalten.*

### Satz

*Die Lösung des Problems ändert sich nicht, wenn alle Matrixeinträge* $x_{ij}$ *durch* $y_{ij} = x_{ij} - u_i - v_j$ *ersetzt werden.*

- Annahme zunächst, dass alle Einträge von $A = (x_{ij})$ Integers sind

# Ungarische Methode (Ursprüngliche Variante)

A Subtrahiere das kleinste Element in $A$ von allen Elementen in $A$. Man erhält Matrix $A_1$ mit nichtnegativen Elementen und mindestens einer Null.

B Finde eine minimale Menge $S_1$ von $n_1$ Linien, die alle Nullen von $A_1$ enthält.
Falls $n_1 = n$, dann gibt es eine Menge von $n$ unabhängigen Nullen und die Elemente der ursprünglichen Matrix $A$ an diesen $n$ Positionen ergeben eine Lösung.

C Falls $n_1 < n$, sei $h_1$ kleinstes Element von $A_1$, das nicht von einer der Linien in $S_1$ überdeckt wird. $\Rightarrow \quad h_1 > 0$
Für jede Linie in $S_1$ addiere $h_1$ zu jedem Element der Linie.
Subtrahiere $h_1$ von jedem Element der Matrix $A_1$ und erhalte $A_2$.

D Wiederhole Schritte B und C mit $A_2$ anstatt $A_1$ usw.

# Ungarische Methode

- Gesamtsumme der Matrixeinträge verringert sich in Schritt C immer um $n^2 h_k - n_k n h_k = n(n - n_k) h_k$.

$\Rightarrow$ terminiert nach endlich vielen Schritten

- Spezifiziere Schritt B, also die Bestimmung
  - einer minimalen Menge von Linien, die alle Nullen überdeckt,
  - einer maximalen Menge unabhängiger Nullen
- Hier unterscheidet sich die Algorithmen von Munkres und Kuhn. (Wir betrachten die Variante von Munkres.)

- betrachte überdeckte Linien (covered lines) und dementsprechend zweifach, einfach oder nicht überdeckte Matrixeinträge

# Ungarische Methode

Init In Matrix $A$:
Bestimme in jeder Zeile den kleinsten Wert und subtrahiere ihn von allen Einträgen dieser Zeile.

Bestimme in jeder Spalte den kleinsten Wert und subtrahiere ihn von allen Einträgen dieser Spalte.

$\Rightarrow$ ähnlich wie Schritt A zuvor (Schritt A erzeugt aber nur mindestens eine Null in der gesamten Matrix, während hier mindestens eine Null in jeder Zeile und jeder Spalte erzeugt wird)

- Betrachte nacheinander jeden Nulleintrag $Z$:
  Wenn es weder in der gleichen Zeile noch in der gleichen Spalte eine $0^*$ gibt, markiere $Z$ mit einem Stern
- Überdecke (cover) jede Spalte, die eine $0^*$ enthält
  (diese sind unabhängig)

# Ungarische Methode

1. Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$
   Betrachte die Zeile, in der sie steht.
   Wenn es dort keine $0^*$ gibt, gehe zu Schritt 2.
   Wenn es eine $0^*$ gibt, überdecke die Zeile und hebe die Überdeckung der Spalte dieser $0^*$ auf.
   Wiederhole das bis alle Nullen überdeckt sind und gehe zu Schritt 3.

2. Es gibt eine Sequenz von $0^*$ und $0'$ wie folgt:

   Sei $Z_0$ eine nicht überdeckte $0'$. (Es gibt nur eine.)
   Sei $Z_1$ die $0^*$ in der Spalte von $Z_0$ (falls existent) und sei $Z_2$ die $0'$ in der Zeile von $Z_1$ (noch zu zeigen, dass diese existiert) usw.

   Die Sequenz stoppt bei einer $0'$ mit der Bezeichnung $Z_{2k}$, die keine $0^*$ in ihrer Spalte hat (auch zu zeigen).

# Ungarische Methode

- Keine Spalte enthält mehr als eine $0^*$.
- Keine Zeile enthält mehr als eine $0'$.

$\Rightarrow$ Sequenz ist eindeutig

- Die Sequenz könnte aber u.U. nur aus $Z_0$ bestehen.

- Die Spalte von $Z_1$ ist nicht überdeckt (weil $Z_1$ in der gleichen Spalte wie $Z_0$ steht und diese nicht überdeckt war).

$\Rightarrow$ Die Zeile von $Z_1$ muss überdeckt sein (alle $0^*$ sind überdeckt).

$\Rightarrow$ Es muss eine $0'$ in der Zeile von $Z_1$ geben (nur mit $0'$ entstehen überdeckte Zeilen in Schritt 1) und diese wird $Z_2$.

- Genauso zeigt man die Existenz aller $Z_{2i}$, wenn $Z_{2i-1}$ existiert.

# Ungarische Methode

- Nummeriere die $0'$ in der gleichen Reihenfolge wie sie in Schritt 1 markiert wurden.

$\Rightarrow$ Die Nummer von $Z_{2i}$ muss kleiner sein als die Nummer der vorhergehenen $0^*$, also von $Z_{2i-2}$.

$\Rightarrow$ Die Sequenz stoppt und alle Elemente von $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ sind verschiedene Matrixeinträge.

- Behandlung der Sequenz $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ als augmentierender Pfad:
  - Entferne in $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ alle $*$-Markierungen
  - Ersetze in $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ alle $0'$ durch $0^*$

  (Neue $0^*$-Menge ist auch unabhängig und um ein Element größer.)
- Entferne alle restlichen $0'$-Markierungen, sowie alle Zeilenüberdeckungen.
- Überdecke alle Spalten, die eine $0^*$ enthalten.
- Falls alle Spalten überdeckt sind, ergeben die $0^*$ die gesuchte Menge, sonst gehe zu Schritt 1.

# Ungarische Methode

- An dieser Stelle sind alle Nullen überdeckt.
  Jede $0^*$ wird exakt von einer Linie überdeckt.
  Es gibt also genau so viele überdeckte Linien wie $0^*$.

  Jede Linienmenge, die alle Nullen überdeckt, kann nicht weniger Linien enthalten als die maximale Anzahl unabhängiger Nullen.

$\Rightarrow$ Die Menge der $0^*$-Einträge bilden eine maximale Menge unabhängiger Nullen und die überdeckten Linien bilden eine minimale Menge, die alle Nullen abdeckt.

$\Rightarrow$ Schritte 1 und 2 (u.U. mit Wiederholungen) ersetzen Schritt B aus dem vorigen Algorithmus

# Ungarische Methode

3. Sei $h$ das kleinste nicht überdeckte Element der Matrix ($h$ ist positiv).

   Addiere $h$ zu jeder überdeckten Zeile und subtrahiere $h$ von jeder nicht überdeckten Spalte (gleiche Transformation wie in Schritt C zuvor).

   Gehe zu Schritt 1 ohne Markierungen oder Überdeckungen zu ändern(!)

   Man könnte meinen, man müsste
   - alle $0'$ demarkieren,
   - jede Zeilenüberdeckung entfernen und
   - die Spalte von jeder $0^*$ überdecken,

   um wieder die gleiche Art von Eingabe zu erhalten bevor man zu Schritt 1 zurückgeht, aber das ist unnötig:

# Ungarische Methode

- Der Effekt der Transformation (Addition / Subtraktion mit gleichem Ergebnis wie in Schritt C) ist, dass
  - alle nicht überdeckten Einträge um $h$ dekrementiert werden, während
  - alle doppelt überdeckten Einträge um $h$ inkrementiert werden.
  - Die einfach überdeckten Einträge bleiben gleich.
- Da jede $0^*$ und jede $0'$ einfach überdeckt sind, bleiben diese Einträge Nullen.
- Das zeigt übrigens $n_{k+1} \geq n_k$, wobei $n_i$ die maximale Anzahl unabhängiger Nullen in Matrix $A_i$ ist; $A_k$ ist die Matrix vor der Transformation und $A_{k+1}$ die transformierte Matrix.