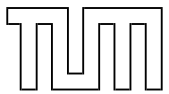
# Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11



# Ungarische Methode

- Seien die $0'$ in der gleichen Reihenfolge nummeriert, in der sie markiert wurden.
- Angenommen, man würde
  - alle $0'$ demarkieren,
  - jede Zeilenüberdeckung entfernen und
  - die Spalte von jeder $0^*$ überdecken,

  bevor man wieder zu Schritt 1 geht.
- Die Anweisung in Schritt 1 schreibt vor, eine (von möglicherweise mehreren) nicht überdeckten Nullen auszuwählen und diese als $0'$ zu markieren.
- Wenn man die Nullen genau in der Reihenfolge ihrer Nummerierung auswählt, erhält man dieselbe Konfiguration von $0^*$, $0'$ und Linienüberdeckungen.

$\Rightarrow$ Diese erneute Initialisierung ist überflüssig.

# Ungarische Methode

- Wie schon bemerkt, senkt Schritt 3 (bzw. C) die Gesamtsumme der Matrixeinträge, so dass der Algorithmus nach endlicher Zeit endet.
- Es gilt aber sogar folgende stärkere Aussage:

  Falls $n_{k+1} = n_k$, dann wird nach Anwendung von Schritt 1 auf $A_{k+1}$ Schritt 2 nicht auftreten und man wird in Schritt 3 mit mehr horizontalen überdeckten Linien (also Zeilen) starten als bei der Anwendung von Schritt 3 auf $A_k$.

- Jede überdeckte Zeile von $A_k$ ist auch überdeckt in $A_{k+1}$.
- Die Transformation von $A_k$ zu $A_{k+1}$ verursacht eine neue Null $Z$ auf einer nicht überdeckten Position.
- $Z$ muss eine $0^*$ in seiner Zeile haben (sonst würde Schritt 2 auf $A_{k+1}$ angewendet mit der Folge $n_{k+1} > n_k$), so dass diese Zeile überdeckt ist, wenn man Schritt 3 erreicht.

# Ungarische Methode

$\Rightarrow$ Nach höchstens $n$ Anwendungen von Schritt 3 erhöht sich die maximale Anzahl unabhängiger Nullen in der Matrix.

$\Rightarrow$ Annahme, dass Elemente von $A$ Integers sind, ist nicht notwendig, um die endliche Laufzeit zu zeigen

- Man kann damit auch eine Laufzeitschranke zeigen: $\mathcal{O}(n^4)$

# Ungarische Methode

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 15 & 15 \\ 4 & 8 & 9 & 11 \\ 10 & 5 & 7 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Kleinstes Element in jeder Zeile abziehen, ebenso für die Spalten:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Ungarische Methode

Betrachte die Nullen und markiere sie mit $*$, falls keine $0^*$ in der gleichen Zeile / Spalte steht

$$\begin{pmatrix} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0^* & 0 \end{pmatrix}$$

(Die $0^*$ sind unabhängig.)

Überdecke Spalten, die $0^*$ enthalten

$$\begin{pmatrix} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0^* & 0 \end{pmatrix}$$

# Ungarische Methode

Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$.

Da in der gleichen Zeile eine $0^*$ steht, hebe deren Spaltenüberdeckung auf und überdecke stattdessen die Zeile.

$\rightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 6 | 9 | 6 |
| 0 | 4 | 5 | 4 |
| 5 | $0^*$ | 2 | $0'$ |
| 6 | 4 | $0^*$ | 0 |

$\rightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 6 | 9 | 6 |
| 0 | 4 | 5 | 4 |
| 5 | $0^*$ | 2 | $0'$ |
| 6 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

Jetzt sind alle Nullen überdeckt.

# Ungarische Methode

Bestimme kleinstes nicht überdecktes Element: 4

Transformation:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 6 | 9 | 6 |
| 0 | 4 | 5 | 4 |
| 5 | $0^*$ | 2 | $0'$ |
| 6 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

$\rightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 2 | 5 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | $0^*$ | 2 | $0'$ |
| 10 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$.

Diesmal steht in der gleichen Zeile keine $0^*$, bestimme also $Z_0, \ldots, Z_{2k}$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 2 | 5 | 2 |
| 0 | $0'$ | 1 | 0 |
| 9 | $0^*$ | 2 | $0'$ |
| 10 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

$\rightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 2 | 5 | 2 |
| 0 | $0'(Z_0)$ | 1 | 0 |
| 9 | $0^*(Z_1)$ | 2 | $0'(Z_2)$ |
| 10 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

# Ungarische Methode

Invertiere $*$-Markierungen der Sequenz, hebe $0'$-Markierungen und Zeilenüberdeckungen auf und überdecke alle $0^*$-Spalten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 2 | 5 | 2 |
| 0 | $0'(Z_0)$ | 1 | 0 |
| 9 | $0^*(Z_1)$ | 2 | $0'(Z_2)$ |
| 10 | 4 | $0^*$ | $0'$ |

$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^*$ | 2 | 5 | 2 |
| 0 | $0^*$ | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 2 | $0^*$ |
| 10 | 4 | $0^*$ | 0 |