Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- $\forall$ “für alle” und
- $\exists$ “es gibt”

gebraucht. Dies sind so genannte logische Quantoren, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

> *Die Menge aller Elemente a aus der Menge A, für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a,b) in der Menge/Relation R enthalten ist.*

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

1. $R^0 := \{(a, a);\ a \in A\}$ $(=: \mathrm{Id}_A)$
2. $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v);\ k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

1. Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
2. Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
3. Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m“ ist die Menge der Tupel (k', m'), so dass gilt:

$$k' \text{ hat seine Mitochondrien von } m' \text{ geerbt.}$$

4.3 Funktionen

Sei $f : A \to B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $\big(f(a), a\big) \quad \forall a \in A$).
(Eine solche Relation heißt auch rechtstotal und linkseindeutig.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
  - $f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}$
  - $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Bemerkungen:

Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \to B$ die zugehörige Relation $\hat{f}$ als die Menge

$$\{(f(a), a) \; ; \; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.

Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die Komposition (Hintereinanderausführung) einer Funktion g nach einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

$$g \text{ nach } f \,.$$

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x))$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}\,.$$

Eigenschaften von $f : A \to B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B)\left[\left|f^{-1}(b)\right| \leq 1\right]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B)\left[\left|f^{-1}(b)\right| \geq 1\right]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B)\left[\left|f^{-1}(b)\right| = 1\right]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \to B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \to B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B, haben A und B *gleiche Kardinalität*.
Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A, $\tilde{R}$ eine Relation über B.

- Eine Funktion $f : A \to B$ heißt Homomorphismus von R nach $\tilde{R}$, falls gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \Rightarrow \Big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\Big) \in \tilde{R}$$

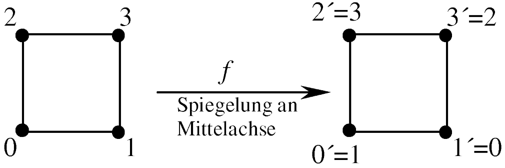
- Eine Bijektion $f : A \to B$ heißt Isomorphismus zwischen R und $\tilde{R}$, falls gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \iff \Big(f(a_1), \ldots, f(a_k)\Big) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \big\{\{0,1\},\{0,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{1,2,3,4\}$

Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse



$E' = f(E) = \big\{\{0',1'\},\{0',2'\},\{1',3'\},\{2',3'\}\big\}$

f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E.

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
  („untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
  („obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

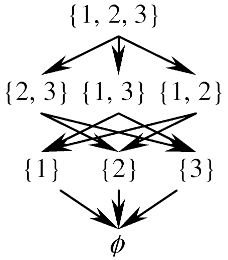
$$\lfloor\pi\rfloor = 3, \lfloor-\pi\rfloor = -4, \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.4 Partielle Ordnungen

Sei $(S, \preceq)$ eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A),\ \preceq \equiv \subseteq,\ A = \{1, 2, 3\}$
Hassediagramm:



Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen vergleichbar (bzgl. $\preceq$), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst unvergleichbar.
- Ein Element $a \in S$ heißt minimal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \land b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt maximal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \land a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt linear oder vollständig, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält $\big($z. B. $(\mathbb{N}_0, \leq)\big)$.

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und", „oder", oder der Negation.

Der Boolesche Aussagenkalkül stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.