**Beobachtungen:** Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)

## Satz 220

*Eine formale Potenzreihe*

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

*besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.*

## Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

## Beweis (Forts.):

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

$\big($dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von $z^n$ in $(\ldots)\big)$ folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist $b_n$ und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. $\square$

## Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \ldots) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

## Satz 222

*Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:*

1. $$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$

3. $$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

4.

$$\sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5.

$$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6.

$$\sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1+z)$$

## Beweis:

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine $a$ verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n\\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m+1$.

□

## Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n \geq m} a_{n-m} \cdot z^n \ .$$

## Beispiel (Forts.)

*Damit gilt*

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \overset{\text{Folie 6(6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n \,.$$

$(*)$ *Das Gleichheitszeichen gilt, da für* $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

*ist.*

## 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

### Beispiel 224

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

*lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung*

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \\ a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2) \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} a_n - 2 \cdot a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} \\ \Rightarrow 0 &= a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} \end{aligned}$$

*lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung*

# Beispiel (Forts.)

*Zu dieser linearen Rekursionsgleichung*

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

*gehört das folgende charakteristische Polynom:*

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

*Später wird gezeigt, dass die* $a_n$ *hier von der Form*

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

*sind. Aus den Anfangsbedingungen* $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ *ergibt sich* $c_1 = 1$ *und* $c_2 = 2$*. Damit gilt*

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

## Beispiel (Forts.)

*Man zeigt auch allgemein, dass*

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad \textit{folgende Bedingung erfüllt:}$$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

## Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

## Satz 226

*Sei* $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ *eine gegebene Folge,* $q_i \in \mathbb{C}, d \geq 1, q_d \neq 0$*. Sei weiter*

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d$$

*Das reflektierte Polynom dazu ist*

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

*(Bemerkung:* $q^R(z)$ *ist das charakteristische Polynom). Seien* $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ *die verschiedenen Nullstellen von* $q^R$*, sei* $d_i$ *die Vielfachheit von* $\alpha_i$*. Damit ist*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

## Satz 226 (Forts.)

*Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge* $(f_n)_{n\geq 0}$, *mit*

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

*der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. **Lineare Rekursion:** *($d$ ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\Big[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\Big]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

*für ein Polynom* $p(z)$ *vom Grad* $< d$.

# Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome $g_i$, $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \ldots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome $p_i$, $\deg(p_i) < d_i$, so dass*

$$(\forall n \geq 0)\left[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n\right]$$

**Beweis:**

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \left\{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\right\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

## Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$
Es ist
$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d) \cdot \sum_{n\geq 0} f_n z^n = p(z)$$
mit $\deg(p) \leq d-1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$.
Betrachte für $n \geq 0$
$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \ldots + f_n q_d = 0\ .$$
Damit gilt, dass
$$\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_1,$$
also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

## Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $\left(f_n\right)_{n \geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}\ .$$

## Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z}),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) = \left(q^R(z)\right)^R &= \left(\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{z}-\alpha_i)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i z)^{d_i} \ . \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left( g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg\bigl(p(z)\bigr) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} d_i = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.