

WS 2010/11

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

27. Oktober 2010

ZÜ I

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Ziele der Zentralübung
3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen
4. Metasprachliche Konzepte
5. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 2

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Mi 14.15–15:45 Ort: PH HS1 (PH 2501)
- Webseite:
<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>
- Kontakt Dr. W. Meixner:
 - Epost: meixner@in.tum.de
 - Telefon: 089 289 17713
 - Raum: MI 03.09.040
 - Sprechstunde: im Anschluss an die Zentralübung und n.V.
- Material:
 - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
 - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie

1.2 Aufgabenstruktur der Übungen

Die **Übungsblätter** bestehen aus Aufgaben für Vorbereitung (**VA**), Aufgaben für Tutorübung (**TA**) und Hausaufgaben (**HA**) mit folgender

Zielsetzung:

VA: Vorbereitung der Tutorübungen (inhaltlich parallel zur Vorl.).

TA: Stoff der Gruppenarbeit in der Tutorübung,

HA: Wiederholung und Lernkontrolle (Prüfungstil).

Bearbeitung:

VA für Eigenstudium und Besprechung in der Zentralübung (ZÜ).

HA werden nicht besprochen, aber korrigiert.

Musterlösungen:

Zu allen Aufgaben der Übungsblätter und Klausur wird es Musterlösungen auf der Übungswebseite geben.

1.3 Persönliche Kommunikation

- Rückkopplung zur Übungsleitung:
Dr. W. Meixner,
Epost: meixner@in.tum.de,
Büro: MI 03.09.040,
Sprechstunde: nach Zentralübung und n.V.
- Mitarbeit bei Musterlösungen
- Kontakt mit Tutoren im Arbeitsraum für DS Teilnehmer
- Kummerkasten: DS-Briefkästen und Epost

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und allgemeine **didaktische Ziele**.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor-, Haus- bzw. Prüfungsaufgaben der Übungsblätter bzw. Mittelklausur.
- **Persönliche Kommunikation:**
 - Rückkopplung zu Übungsleitung und Tutoren
 - Antworten auf Kummerkasten: Briefkästen und Epost

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Vertiefung der **informellen Metasprache**

3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen

3.1

Mathematisch–Theoretische Informatik in den ersten 4 Semestern:

- Diskrete Strukturen (DS)
- Informatik 1 (Info1)
- Lineare Algebra (LA)
- Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen (GAD)
- Analysis (A)
- Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (DWT)
- Theoretische Informatik (Theo)

3.2

Spezielle Beziehungen von **DS** zu

- **Info1:** Algorithmenbegriff, Beweisverfahren, Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Mengenlehre, Bäume, Rekursion und Induktion.
- **LA:** Matrizen, Matrixpotenzen, Vektorräume, Algebren, Körpertheorie.
- **GAD:** Bäume, Graphen, Zählverfahren, Landau Symbole.
- **A:** Reelle und komplexe Zahlen, Grenzwerte, Potenzreihen, Polynome.
- **DWT:** Zählmaße und Zählprobleme, Kombinatorik.
- **Theo:** Graphentheorie, Eigenschaften von Algorithmen, Rekursionstheorie, Komplexitätstheorie.

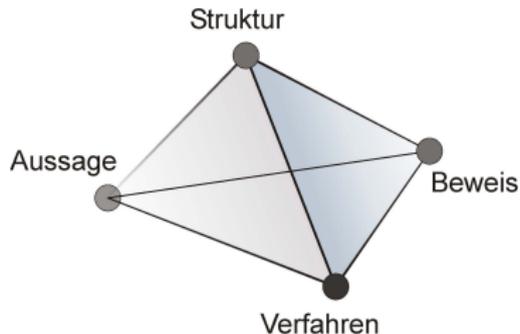
4. Grundlegende Metasprachliche Begriffe

4.1 Basisbegriffe der Informatik

Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Tetraeder der Basisbegriffe



Informelle Präzisierung:

- **Struktur:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Objekten**.
- **Verfahren:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Vorgängen**.
- **Aussage:** Sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu sagen, dass es **wahr oder falsch** ist. (*Aristoteles*)
- **Beweis:** Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage.

Die Begriffe 'Objekt' und 'Vorgang' bedingen sich gegenseitig. Jeder Vorgang führt zu einem Objekt als Ergebnis. Umgekehrt ist jedes Objekt das Ergebnis eines Vorgangs.

„Die mathematisch–theoretische Informatik kann nicht wie die Mathematik allein auf der Mengenlehre aufgebaut werden.“

Bemerkung:

In natürlichen Sprachen gibt es zweideutige (**bivalente**) Begriffe, die sowohl als Begriff für Objekte als auch als Begriff für Vorgänge gedeutet werden können. Beispiel: 'Zusammenfassung'.

Das Wort 'Zusammenfassung' kann sowohl den Vorgang des Zusammenfassens als auch das 'objektive' Ergebnis dieses Vorgangs bedeuten.

Diese Zweideutigkeit ermöglicht eine Vertauschung einer **operationellen** gegen eine **beschreibende** Interpretation.

Die gegenseitige Bedingtheit der Begriffe „**Objekt**“ und „**Vorgang**“ begründet **fundamentale Dualitätsbeziehungen** in der Informatik.

Dies kann erst am Ende des Semesters diskutiert werden mit Rückgriff sowohl auf die Ergebnisse von DS als auch von Info1.

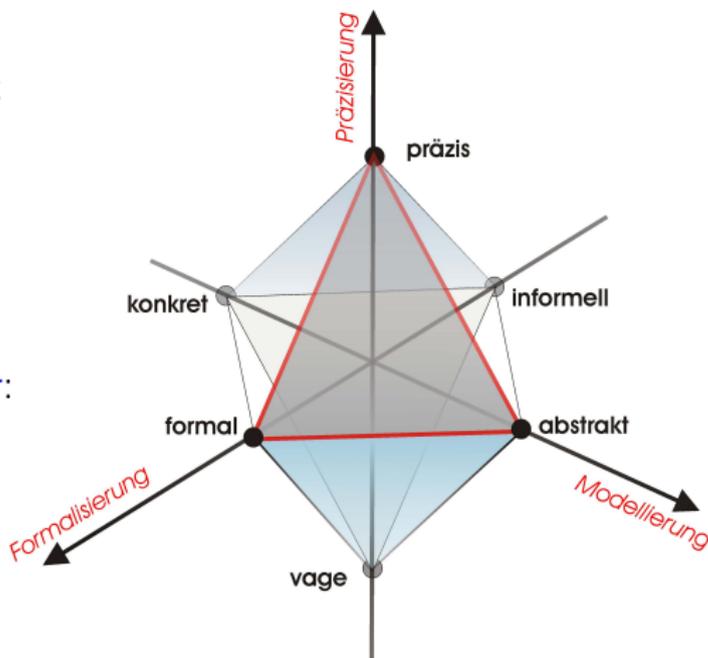


4.2 Vertiefung der informellen Metasprache

Wissenschaftliche Schulung und Entwicklung vollzieht sich im Spannungsfeld folgender Begriffspaare:

- vage — präzise
- konkret — abstrakt
- informell — formal

Darstellung im Oktaeder:



- Durch „*Abstraktion*“ „erzeugen“ wir abstrakte (= von uns gedachte) *Inhalte* (Objekte, Vorgänge), die **nicht identisch** sind mit dem „konkret Gemeinten“!
(*Modellierung*)
- Wir *formalisieren* abstrakte Inhalte, indem wir sie durch *konkrete Zeichen(folgen)* „benennen“.
(*Formalisierung*)
- Wir *präzisieren* abstrakte Inhalte, indem wir *logische Konsequenzen* mit dem Gemeinten vergleichen, und dann die Modellierung adäquat ändern.
(*Präzisierung*)

Abstraktionen versus Phantasien:

*„Wer über einen gedachten Stein stolpert
und sich dabei den Arm bricht, der hat ein
Problem mit der*

Wahrnehmung der Wirklichkeit.“



5. Vorbereitung Tü Blatt 2

5.1 VA 1

- 1 Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche \leq -Ordnung der Zahlen $[6]$. Wie ergibt sich die \leq -Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?

Erklärung:

Ein **Hasse-Diagramm** ist eine graphische Darstellung einer binären Relation R . Paare (a, b) werden als Pfeile oder als Kanten von oben nach unten zwischen Punkten dargestellt. Dabei ist das wichtigste darstellerische Prinzip, dass all jenes **nicht** gezeichnet wird, was sich durch die Eigenschaften der darzustellenden Relation von selbst versteht. **Abstrakt** betrachtet ist aber das Hasse-Diagramm selbst wieder eine **Relation** H , die in einem definierten Verhältnis zu R steht.

- Für ein Hasse-Diagramm H einer transitiven und reflexiven Relation R gilt stets $H \subseteq R$. Die **reflexive und transitive Hülle** von H ist gleich R .
- H ist stets **minimal** in dem folgenden Sinn:
 H enthält keine reflexiven Pfeile (x, x) und nur solche Pfeile $(x, y) \in R$, die sich nicht aus der transitiven Verkettung von Pfeilen $(x, z) \in H$ und $(z, y) \in H$ ergeben.
- Für das (**abstrakte**) Hasse-Diagramm H der geordneten Menge $[6]$ gilt damit

$$H = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}.$$

(Zeichnung)

R ergibt sich dann aus H als reflexive und transitive Hülle.

- ② Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation \leq auf \mathbb{N} . Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!

Antwort: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv.

Begründung: Die **Eigenschaft der Transitivität** für eine Relation R ist genau dann **verletzt**, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- 1. Fall:** Es gibt paarweise verschiedene Elemente x , y und z , so dass $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ gilt, nicht aber (x, z) aus R , d. h. dass $(x, z) \notin R$ gilt.
- 2. Fall:** Es gibt verschiedene Elemente x , y , so dass $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ gilt, aber gleichzeitig $(x, x) \notin R$ gilt.

Entfernt man nun das Paar $(3, 4)$ aus \leq , dann muss man prüfen, ob nun der Fall 1 eintreten kann.

Nun gilt: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv, weil es kein anderes Element z „echt zwischen“ 3 und 4 gibt, d. h. mit $3 \leq z$ und $z \leq 4$ und $z \neq 3, z \neq 4$.

Gäbe es ein solches z , dann könnte $(3, 4)$ nicht entfernt werden, ohne die Transitivitätseigenschaft nach Fall 1 zu verletzen.

(Zeichnung)

- 3 Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation \subseteq auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Antwort: Nur für $|M| \leq 1$ ist $\mathcal{P}(M)$ total geordnet.

Falls $a, b \in M$ mit $a \neq b$,
dann gilt weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$.

5.2 VA 2

- ① Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$? Begründung!

Antwort:

Sei $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

Begründung:

Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

$$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2).$$

O.B.d.A. können wir $m_1 \leq m_2$ annehmen.

Es folgt

$$3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} \cdot 3^{n_2}.$$

Wäre $m_2 - m_1 > 0$,

dann müßte 2 ein Teiler von 3 sein, weil 2 prim ist.

Aber 3 ist unzerlegbar.

Also folgt $m_1 = m_2$.

Analog erhält man $n_1 = n_2$, mithin $x_1 = x_2$.

Ergebnis: Wir haben also gezeigt: es kann nicht sein, dass zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 durch f auf ein und dasselbe y abgebildet werden. Genau das besagt die Injektivität von f .

- 2 Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$? Begründung!

Antwort:

Sei

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & : n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & : n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

f ist surjektiv.

Begründung: Es gibt zu jeder ganzen Zahl y eine natürliche Zahl n , so dass $f(n) = y$. Denn:

Falls $y > 0$, gilt dies für $n = 2y$.

Falls $y \leq 0$, gilt dies für $n = -2y + 1$.

Bemerkung: f ist sogar injektiv, also insgesamt bijektiv.

- ③ Gilt für $f : X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
Begründung!

Antwort: Nein!

Begründung: Seien $X = \{1, 2\}$, $Y = \mathbb{N}$ und $f(1) = 3$, $f(2) = 3$. Wir betrachten $A = \{1\}$.

Dann gilt $f(A) = \{3\}$ und $f^{-1}(\{3\}) = \{1, 2\}$.

Offenbar gilt $2 \notin A$, aber $2 \in f^{-1}(f(A))$,

d. h. $f^{-1}(f(A)) \not\subseteq A$.