

WS 2010/11

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

3. November 2010

# ZÜ II

## Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Kommentare zu Hausaufgaben, Sonstiges.
2. Inhaltliche Bezüge der Hausaufgaben auf Blatt  $n$ .
3. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 3.

# 1. Übungsbetrieb:

## 1.1 Kommentare zu Hausaufgaben

Frage:

Hausaufgaben

- ① zu leicht?
- ② leicht?
- ③ mittel?
- ④ schwer?
- ⑤ zu schwer?

## 1.2 Sonstige Kommentare:

## 2. Inhaltliche Bezüge der Hausaufgaben auf Blatt $n$

### 2.1 Allgemein

Die Hausaufgaben auf Blatt  $n$  beziehen sich im Allgemeinen

- schwerpunktmäßig auf Tutorthemen von Blatt  $n - 2$ ,
- gelegentlich auf Tutorthemen von Blatt  $n - 1$ ,
- punktuell auf Vorgängerblätter,
- eventuell auf Blatt  $n$  in Bezug auf Vorbereitungsaufgaben,
- oder sind allgemeine Denkaufgaben.

## 2.2 Beispiel Blatt 3

Inhaltlicher Bezug der Hausaufgaben:

- HA 1: Arbeitsblatt 1 und VA 1 von Blatt 3.
- HA 2: Blatt 1
- HA 3: Blatt 2
- HA 4: Allgemeine Denkaufgabe im Hinblick auf Logik

## 3. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 3

### 3.1 VA 1

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der **Potenz**  $p^q$ .

Man nennt die daraus abgeleitete Funktion  $x^a$  **Potenzfunktion**,  
und die Funktion  $a^x$  **Exponentialfunktion**  
mit dem Spezialfall  $e^x$ .

Die **Umkehrung** von  $a^x$  führt auf die **Logarithmusfunktion**  $\log_a x$ .

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl  $x$  zur Basis  $b$  mit

$$\log_b x$$

bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig

$$\log x .$$

Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} .$$

Für  $b = e$  wird  $\ln x$  ,  
für  $b = 10$  wird  $\lg x$  ,  
für  $b = 2$  wird  $\text{ld } x$   
geschrieben.

Im Folgenden setzen wir die **grundlegenden Eigenschaften** der Logarithmus- bzw. Exponentialfunktion als bekannt voraus, also z. B.

$$0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y ,$$

$$e^0 = 1 < e^z ,$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{R}^+$  .

Insbesondere setzen wir die **Stetigkeit** der Funktionen voraus.

- 1 Geben Sie einen **direkten Beweis** für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n},$$

wobei

$$0 < a, 0 < b, 0 < c \text{ bzw. } 0 < n$$

vorausgesetzt wird.

Die Beweise kann man durch **Logarithmieren** führen.

Zum Beweis einer Gleichung

$$x = y$$

für **positive**  $x$  und  $y$  beweist man zunächst

$$\log_d x = \log_d y,$$

weil daraus wegen  $d^{\log_d z} = z$  für  $z = x$  und  $z = y$ ,  
sofort  $x = y$  folgt.

Wir zeigen also

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a} \quad \text{bzw.} \quad \ln n^{\ln \ln n} = \ln (\ln n)^{\ln n}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c) \cdot (\log_b a) \\ &= (\log_b a) \cdot (\log_b c) \\ &= \log_b c^{\log_b a}\end{aligned}\tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}\ln n^{\ln \ln n} &= (\ln \ln n) \cdot (\ln n) \\ &= (\ln n) \cdot \ln (\ln n) \\ &= \ln (\ln n)^{\ln n}.\end{aligned}\tag{2}$$

- 2 Sei  $a > 0$  eine Konstante.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(x) = a \cdot e^x$  für alle  $0 < a \in \mathbb{R}$

- **bijektiv** ist
- und für  $a = 1$  ein **Isomorphismus** von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^+$  ist bezüglich der Addition von reellen Zahlen bzw. der Multiplikation von positiven reellen Zahlen.

## Beweis:

- Die **Injektivität** von  $f(x) = a \cdot e^x$  beweist man wie folgt:

Aus  $x < y$  folgt  $1 < e^{y-x}$ .

Daraus folgt  $e^x < e^y$ ,

mithin  $a \cdot e^x < a \cdot e^y$ ,

d.h.  $f(x) < f(y)$ .

- Zum Nachweis der **Surjektivität** von  $f$  zeigen wir

$$(\forall y \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathbb{R}) [y = f(x)].$$

Sei  $1 < \frac{y}{a} \in \mathbb{R}^+$ . (Analog für  $1 < \frac{a}{y} \in \mathbb{R}^+$ .)

Sei  $n$  eine natürliche Zahl mit  $\frac{\frac{y}{a}-1}{e-1} \leq n$ . Dann gilt

$$e^0 = 1 < \frac{y}{a} \leq 1 + n(e-1) \leq (1 + (e-1))^n = e^n$$

Da  $e$  eine stetige Funktion ist, gibt es ein  $x$  mit  $0 < x \leq n$ , so dass

$$\frac{y}{a} = e^x = \frac{f(x)}{a},$$

d. h.

$$y = f(x).$$

- Damit ist  $f$  bijektiv.
- $f$  ist ein Isomorphismus.

Der vollständige Nachweis der Isomorphieeigenschaft gelingt aber nur für  $a = 1$  wie folgt:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y).$$

## 3.2 VA 2

- 1 Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $F$  an, so dass  $F$  und  $\neg F$  erfüllbar ist!

Antwort:

Sei  $F = (x \equiv y)$ .

Dann ist die Formel  $F$  unter der Belegung  $x \mapsto 1, y \mapsto 1$  wahr, denn es gilt  $(1 \equiv 1) = 1$  (siehe Tabelle in der Vorlesung).

Also ist  $F$  erfüllbar.

Die Formel  $\neg F$  ist unter der Belegung  $x \mapsto 1, y \mapsto 0$  wahr, denn es gilt  $(1 \equiv 0) = 0$  und deshalb  $\neg(1 \equiv 0) = 1$ .

Also ist  $\neg F$  erfüllbar.

2 Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

Antwort:

$$F = \text{false} .$$

oder

$$F = x \wedge \neg x .$$

### 3.3 VA 3

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen  $x, y, z$  als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

Wir berechnen in mehreren Spalten die Zwischenergebnisse. Die Eingabeparameter sollten aus Gründen der besseren Lesbarkeit stets lexikographisch sortiert werden.

Sei  $F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)$ .

$x$	$y$	$z$	$x \Rightarrow y$	$\neg(x \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)$	$z \Rightarrow y$	$F$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Man kann die Zwischenergebnisse auch direkt in eine Spalte unter den Operator schreiben und dazu nur die Formel  $F$  einmalig in die Kopfzeile der Tabelle schreiben.

Allerdings leidet dann die Übersichtlichkeit.