

WS 2010/11

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

22. Dezember 2010

# ZÜ IX

## Übersicht:

1. **Übungsbetrieb:** Weihnachtswoche und Termine
2. **Nachholung:** Fouriertransformation: VA 3, TA 3, Blatt 8.
3. **Vorbereitung** auf TA's Blatt 10:

# 1. Übungsbetrieb Weihnachtswoche und Termine

## 1.1 Weihnachtswoche

Siehe Folien vom 15. Dezember.

## 2. Nachholung

### 2.1 Fouriertransformation

Siehe Folien vom 15. Dezember.

### 3. Vorbereitung auf TA's Blatt 10

#### 3.1 VA 1, Zählen von Relationen und Mengen

Sei  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Wir betrachten die Menge aller Relationen  $R \subseteq M \times M$ .

- 1 Wie viele Relationen über  $M$  gibt es?

Lösung:

Die Anzahl  $\text{anz}_{\text{Rel}}(M)$  der Relationen über  $M$  ist gleich der Anzahl der Teilmengen von  $M \times M$ .

Wegen  $|M \times M| = m^2$  gilt

$$\text{anz}_{\text{Rel}}(M) = |\mathcal{P}(M \times M)| = 2^{m^2}.$$

2 Wie viele Relationen über  $M$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  Elementen gibt es?

Lösung:

Die Frage ist,

wie viele Teilmengen mit  $k$  Elementen besitzt  $M \times M$ ,

d. h., welchen Wert besitzt  $|\{R \in \mathcal{P}(M \times M) ; |R| = k\}|$  ?

Nach Vorlesung besitzt jede Menge mit  $m$  Elementen genau

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

$k$ -elementige Teilmengen.

Damit gilt für  $k \leq m^2$  (und auch für  $k > m^2$ )

$$|\{R \in \mathcal{P}(M \times M) ; |R| = k\}| = \binom{m^2}{k}.$$

3 Wie viele reflexive Relationen über  $M$  gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über  $M$  entfernt man zunächst aus  $M \times M$  alle  $m$  Paare  $(x, x)$  der Identität  $\text{Id}_M$ ,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die

Anzahl  $\text{anz}_{refRel}$  der reflexiven Relationen über  $M$  wie folgt.

$$\text{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \text{Id}_M)| = 2^{m^2 - m}.$$

- 4 Sei  $A$  eine  $n$ -elementige Menge und es sei  $B$  eine  $m$ -elementige Teilmenge von  $A$ .

Wie viele Teilmengen  $C$  von  $A$  gibt es, die  $B$  enthalten, für den Fall  $n = 5$  und  $m = 2$ ?

Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall  $n, m \in \mathbb{N}_0$  an und begründen Sie diese Formel.

## Lösung:

Sei  $B \subseteq A$ .

Seien  $A' := A \setminus B$  und  $[B, A] := \{C \subseteq A ; B \subseteq C \subseteq A\}$ .

Dann ist  $f : [B, A] \rightarrow \mathcal{P}(A')$  mit  $f(C) = C \setminus B$  eine **bijektive Abbildung** von  $[B, A]$  auf  $\mathcal{P}(A')$ .

Es gilt wegen  $|A'| = n - m$

$$|\mathcal{P}(A')| = 2^{n-m}.$$

Für  $n = 5$  und  $m = 2$  ergibt sich  $|\mathcal{P}(A')| = 2^3 = 8$ .

## 3.2 VA 2, Zählen von Relationen und Mengen

Sei  $M = \{0, 1, 2\}$ .

- 1 Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über  $M$  auf!

Lösung:

Äquivalenzrelationen sind durch die Menge ihrer zugeordneten Äquivalenzklassen bestimmt.

Über der Grundmenge  $M$  mit 3 Elementen gibt es Äquivalenzrelationen mit 3 Klassen, mit 2 Klassen und mit einer einzigen Klasse.

Die Menge der zugeordneten Klassen bildet eine Partition  $P$  der Grundmenge  $M$ .

Äquivalenzrelationen mit

1 Klasse:  $P_{1,1} = \{\{0, 1, 2\}\}.$

Äquivalenzrelationen mit

2 Klassen:  $P_{2,1} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}.$

$$P_{2,2} = \{\{1\}, \{0, 2\}\}.$$

$$P_{2,3} = \{\{2\}, \{1, 0\}\}.$$

Äquivalenzrelationen mit

3 Klassen:  $P_{3,1} = \{\{1\}, \{2\}, \{0\}\}.$

② Wie viele Partitionen gibt es über  $M$ ?

Lösung:

Die Partitionen entsprechen eindeutig den Äquivalenzrelationen.  
Also gibt es 5 Partitionen über  $M$ .

3 Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?

Lösung:

Falls  $M = \emptyset$ ,  
dann ist  $R = \emptyset$  eine Äquivalenzrelation über  $M$ .

Aus  $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$  folgt,  
dass  $\emptyset$  die **einzig**e Relation über  $\emptyset$  ist.

Die Menge der Klassen dieser Relation  $R$  ist leer.  
Damit entspricht die leere Menge von Klassen in diesem Fall einer  
(einzig)en Partition von  $M$ .

- 4 Wie viele surjektive Abbildungen  $f$  von  $M$  auf  $M' = \{1, 2\}$  gibt es?

Lösung:

Damit  $f$  surjektiv ist, muss  $\{k_1, k_2\}$  mit  $k_1 := f^{-1}(1)$  und  $k_2 := f^{-1}(2)$  eine 2-elementige Partition über  $M$  bilden.

Also kommen nur die Partitionen  $P_{2,1}$ ,  $P_{2,2}$  und  $P_{2,3}$  für  $\{k_1, k_2\}$  in Frage.

Für die Zuordnung der Urbildklassen  $k_1, k_2$  zu den Klassen der Partitionen  $P_{i,j}$  gibt es nun stets 2 Möglichkeiten.

Deshalb erhalten wir insgesamt **6 surjektive Abbildungen**.

5 Wie viele injektive Operationen  $f : M \rightarrow M$  gibt es?

Lösung:

Eine injektive Operation über einer endlichen Menge  $M$  ist gleichzeitig surjektiv und damit bijektiv.

Für die Abbildung von 0 gibt es 3 Möglichkeiten.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es dann 2 Möglichkeiten der Abbildung des Elementes 1.

Damit erhalten wir  $2 \cdot 3 = 6$  injektive Operationen über  $M$ .

6 Geben Sie alle Variationen von  $M$  an!

In der Vorlesung haben wir dafür  $k$ -Permutation gesagt.

D.h., die Begriffe  $k$ -Variation und  $k$ -Permutation sind synonym.

Lösung:

Eine  $k$ -Variation ( $k$ -Permutation) einer Menge  $A$  wurde als Sequenz  $q_1, q_2, \dots, q_k$  der Länge  $k$  von paarweise verschiedenen Elementen  $q_i$  aus  $A$  definiert.

Eine  $k$ -Variation mit  $k = |A|$  wird Permutation von  $A$  genannt.

Wir ordnen jeder Variation  $q_1, q_2, \dots, q_k$  über einer endlichen Menge  $A$  in eindeutiger Weise eine bijektive Abbildung  $f : [1, k] \rightarrow A$  wie folgt zu

$$f(i) = q_i .$$

## Fall $k = 3$ (Permutationen):

Wir erhalten die folgenden 6 Abbildungen  $f_1, f_2, \dots, f_6$ .

	1	2	3
$f_1$	0	1	2
$f_2$	0	2	1
$f_3$	1	0	2
$f_4$	1	2	0
$f_5$	2	0	1
$f_6$	2	1	0

Fall  $k = 2$ :

Wir erhalten die folgenden 6 Abbildungen  $r_1, r_2, \dots, r_6$ .

	1	2
$r_1$	0	1
$r_2$	0	2
$r_3$	1	0
$r_4$	1	2
$r_5$	2	0
$r_6$	2	1

Fall  $k = 1$ :

Wir erhalten die folgenden 3 Abbildungen  $s_1, s_2, s_3$ . (gespiegelte Liste).

	$s_1$	$s_2$	$s_3$
1	0	1	2

Fall  $k = 0$ :

Wir erhalten die leere Sequenz bzw. leere Abbildung als einzige Variation der Länge 0.

### 3.3 VA 3, Zählen von Wörtern

- 1 Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.

Wie viele verschiedene Dominosteine dieser Art gibt es?

Lösung:

Die Punktezahlen auf den beiden Quadraten eines Dominosteines bilden eine 2-elementige Multiteilmenge der Menge  $[7] \in \mathbb{N}$ .

Nach Formel für die Anzahl  $\text{anz}_M M(2, 7)$  von 2-elementigen **Multiteilmengen** einer 7-elementigen Menge gilt

$$\text{anz}_{MM}(2, 7) = \binom{7+2-1}{7-1} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28.$$

- 2 Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

### *MINIMALISIERUNG*

bilden lassen.

Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

## Lösung:

Das gegebene Wort hat 15 Buchstabenvorkommen mit den folgenden Vielfachheiten:

A - 1, E - 1, G - 1, I - 4, L - 1, M - 2, N - 2, R - 1, S - 1, U - 1.

Würden alle Buchstabenvorkommen zu verschiedenen Buchstaben gehören (d. h. unterscheidbar sein), dann gäbe es  $15!$  verschiedene Wörter.

Allerdings sind jeweils  $4! \cdot 2! \cdot 2!$  der Wörter gleich, weil sie sich nur durch Vertauschung gleicher Buchstabenvorkommen zu I, M bzw. N ergeben.

Damit ergibt sich die Anzahl der verschiedenen Wörter mit

$$\frac{15!}{4!2!2!} = 13621608000.$$

### 3.4 VA 4, Binomialkoeffizienten

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von  $x^3y^2z^2$  und  $x^2z^3$  in  $(x + xy + z)^5$ .

Lösung:

Wir führen eine Klammerung ein und benutzen die Binomische Formel.

$$(x + xy + z)^5 = ((x + xy) + z)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (x + xy)^{5-k} \cdot z^k$$

Koeffizient von  $x^3y^2z^2$ :

Es ist der Summand für  $k = 2$  zu betrachten.

$$\binom{5}{2}(x + xy)^3z^2 = \binom{5}{2}z^2 \cdot \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i}x^{3-i}(xy)^i$$

Der gesuchte Koeffizient  $C$  ergibt sich aus dem Summanden für  $i = 2$  wie folgt.

$$C = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30.$$

Koeffizient von  $x^2z^3$ :

Es ist der Summand für  $k = 3$  zu betrachten.

$$\binom{5}{3}(x + xy)^2z^3 = \binom{5}{3}z^3 \cdot \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i}x^{2-i}(xy)^i$$

Der gesuchte Koeffizient  $C$  ergibt sich aus dem Summanden für  $i = 0$  wie folgt.

$$C = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{0} = 10.$$