

WS 2010/11

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

19. Januar 2011

ZÜ XI

Übersicht:

1. Thema: Rationale Funktionen.
2. Vorbereitung: auf TA's Blatt 12

1. Thema Rationale Funktionen

1.1 Rationale Ausdrücke

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

1.2 Rationale Funktionen

Ganze rationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Gebrochene rationale Funktionen

Definitionsbereiche mit „endlich vielen Ausnahmen“.

Siehe **Vorbereitungsaufgabe 2!**

2. Vorbereitung auf TA's Blatt 12

2.1 VA 1

Sei F die Menge aller Abbildungen einer Menge M in die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Wir definieren für alle $f \in F$ und $g \in F$

die **Summe**, i. Z. $f + g$, bzw. das **Produkt**, i. Z. $f \cdot g$,

als diejenigen komplexwertigen Funktionen h bzw. k , für die für alle $x \in M$ gilt

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{bzw.}$$

$$k(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Entsprechend führen wir über der Menge $F \rightarrow F$ der Operatoren über F **Addition** und **Multiplikation** wie folgt ein.

Für alle $A, B : F \rightarrow F$ und $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned}(A + B)(f) &= A(f) + B(f) \quad \text{bzw.} \\ (A \cdot B)(f) &= A(f) \cdot B(f).\end{aligned}$$

Beispiele für Operatoren über F sind sowohl der **Translationsoperator** E als auch der **Differenzenoperator** Δ .

- ① F ist ein Ring bezüglich
obiger Addition „+“ und Multiplikation „·“.

Beweis!

Geben Sie die entsprechenden neutralen Elemente
bezüglich $+$ und \cdot an.

Lösung:

Da Addition und Multiplikation in \mathbb{C} beides **assoziativ** und **kommutativ** sind, gilt dies auch für die entsprechend **induzierten** Verknüpfungen von komplexwertigen Funktionen.

Entsprechend folgt die **Distributivität**.

Dazu die folgende Rechnung für alle $x \in M$:

$$[f + (g + h)](x) = f(x) + g(x) + h(x) = [(f + g) + h](x),$$

$$[f \cdot (g \cdot h)](x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = [(f \cdot g) \cdot h](x),$$

$$[f \cdot (g + h)](x) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) = [(f \cdot g) + (f \cdot h)](x).$$

1. F ist eine Gruppe bezüglich „+“:

Es genügt, die **Lösbarkeit der Gleichung** $f + h = g$ für alle Funktionen $f, g \in F$ zu beweisen.

Seien $f, g \in F$.

Wir definieren $h \in F$ für alle $x \in M$ durch $h(x) = g(x) - f(x)$.

Dann folgt für alle $x \in M$

$$\begin{aligned}(f + h)(x) &= f(x) + h(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) = g(x), & \text{d. h.} \\ f + h &= g.\end{aligned}$$

Das **neutrale Element** bezgl. + ist die konstante Funktion $e(x) = 0$.

2. F ist ein Monoid bezüglich „ \cdot “:

Das **neutrale Element** bezgl. \cdot ist die konstante Funktion $e(x) = 1$.

Die **Assoziativität** von \cdot wurde schon gezeigt.

Bemerkung:

Wir haben auch über der Menge $F \rightarrow F$ der Operatoren über F eine Addition und eine Multiplikation durch **Induzierung** eingeführt.

Analog den Verknüpfungen über F begründen diese Verknüpfungen eine **Ringstruktur über der Operatorenmenge $F \rightarrow F$** .

- ② Sei \circ die Komposition von Operatoren. Man zeige für alle Operatoren A, B, C über F :

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \quad (\text{Rechtsdistributivität}).$$

Beispiel:

$$\Delta \circ E^{-1} = (E - I) \circ E^{-1} = E \circ E^{-1} - I \circ E^{-1} = \nabla.$$

Lösung:

Für alle $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned} [(A + B) \circ C](f) &= [A + B](C(f)) \\ &= A(C(f)) + B(C(f)) \\ &= [A \circ C](f) + [B \circ C](f) \\ &= [(A \circ C) + (B \circ C)](f), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- 3 Sowohl der Translationsoperator E als auch der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren über F (wobei $M = \mathbb{Z}$).
Begründung!

Lösung:

Sei $M = \mathbb{Z}$.

Durch E wird jeder Funktion $f \in F$
die Funktion $g \in F$ zugeordnet mit

$$g : M \ni x \rightarrow g(x) = f(x + 1) \in \mathbb{C}.$$

Durch Δ wird jeder Funktion $f \in F$
die Funktion $g \in F$ zugeordnet mit

$$g : M \ni x \rightarrow g(x) = f(x + 1) - f(x) \in \mathbb{C}.$$

2.2 VA 2

Man zeige:

- ① Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$.

Beweis!

Lösung:

Für die **steigende Fakultät** gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\overline{g}} \cdot (x + g) = x^{\overline{g+1}} \quad \text{und} \quad x \cdot (x + 1)^{\overline{g}} = x^{\overline{g+1}}.$$

Für die **fallende Fakultät** gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ entsprechend die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\underline{g}} \cdot (x - g) = x^{\underline{g+1}} \quad \text{und} \quad x \cdot (x - 1)^{\underline{g}} = x^{\underline{g+1}}.$$

Die **Ausdrücke** auf den Gleichungsseiten sind i. A.

Quotienten von polynomiellen Ausdrücken,

und stellen **Elemente** dar (sog. Brüche von Polynomen) aus dem

Quotientenkörper $\mathbb{C}(x)$ über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$

Diese Ausdrücke definieren gleichzeitig

rationale Funktionen aus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

die man durch Einsetzen in x und Auswertung der Ausdrücke erhält.

Übersicht:

Steigende Fakultät:

$$n > 0: \quad x^{\overline{n}} = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \dots \cdot (x + n - 1),$$

$$n = 0: \quad x^{\overline{n}} = 1,$$

$$n < 0: \quad x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x+n) \cdot (x+(n+1)) \cdot \dots \cdot (x-2) \cdot (x-1)}.$$

Fallende Fakultät:

$$n > 0: \quad x^{\underline{n}} = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \dots \cdot (x - (n - 1)),$$

$$n = 0: \quad x^{\underline{n}} = 1,$$

$$n < 0: \quad x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x-n) \cdot (x-(n+1)) \cdot \dots \cdot (x+2) \cdot (x+1)}.$$

Wegen

$$x^{\bar{g}} \cdot (x + g) = x^{\overline{g+1}} \quad \text{und} \quad x \cdot (x + 1)^{\bar{g}} = x^{\overline{g+1}}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \Delta x^{\bar{n}} &= (x + 1)^{\bar{n}} - x^{\bar{n}} \\ &= (x + 1)^{\overline{n-1}} \cdot (x + 1 + n - 1) - x \cdot (x + 1)^{\overline{n-1}} \\ &= (x + n)(x + 1)^{\overline{n-1}} - x \cdot (x + 1)^{\overline{n-1}} \\ &= n(x + 1)^{\overline{n-1}}. \end{aligned}$$

Man zeige:

② Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\nabla x^n = n(x-1)^{n-1}$.

Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$
zusammen mit Lemma 203 für den Beweis!

Lösung:

In Lemma 203 wurde die Gleichung

$$\Delta x^n = nx^{n-1}$$

bewiesen.

Es folgt mit Operatorenrechnung

$$\begin{aligned}\nabla x^n &= (E^{-1}\Delta)x^n \\ &= E^{-1}(\Delta x^n) \\ &= E^{-1}(nx^{n-1}) \\ &= n(x-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Man zeige:

- 3 Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$.

Beweis!

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} [[\nabla\Delta](f)](x) &= [\nabla(\Delta(f))](x) \\ &= [\Delta(f)](x) - [\Delta(f)](x-1) \\ &= (f(x+1) - f(x)) - (f((x-1)+1) - f(x-1)) \\ &= (f(x+1) - f((x+1)-1)) - (f(x) - f(x-1)) \\ &= [\nabla(f)](x+1) - [\nabla(f)](x) \\ &= [\Delta(\nabla(f))](x) \\ &= [[\Delta\nabla](f)](x). \end{aligned}$$

2.3 VA 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k .$$

Lösung:

Wir spezialisieren die Formel der Partiellen Summation wie folgt.

$$\sum_{k=1}^n f(k) \cdot \Delta g(k) = [f(k) \cdot g(k)]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^n \Delta f(k) \cdot g(k+1)$$

Man setzt nun $f(k) = k$, $\Delta g(k) = 2^k$.

Damit gilt $\Delta f(k) = 1$, $g(k) = 2^k$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k &= [k \cdot 2^k]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^n 1 \cdot 2^{k+1} \\ &= [(n+1) \cdot 2^{n+1} - 2] - 4 \cdot (2^n - 1) \\ &= (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \\ &= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

2.4 VA 4

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \quad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Lösung:

Wir machen den Ansatz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{k,i} = \delta_{n,i}$$

mit noch zu bestimmenden $b_{k,i}$.

Binomialinversion (siehe Vorlesung) liefert

$$b_{n,i} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \delta_{k,i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i}.$$