

WS 2010/11

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

2. Februar 2011

# ZÜ XIII

1. **Übungsbetrieb:** Klausur am 19. Februar  
Termine, Anmeldung, Ablauf Code
2. **Vorbereitung:** auf TA's Blatt 14

# 1. Übungsbetrieb: Klausur am 19. Februar

## 1.1 Termine

Zeit: Samstag, 19. Februar, 13.30 - 15.30 Uhr

Ort: Hörsäle MW 0001 und MW 2001

Bitte mindestens **15 Minuten vor Beginn** im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung: Organisation wie bei der Midterm!

## 1.2 Anmeldung

Eine **Anmeldung** über TUMonline für die Endterm ist für alle Teilnehmer, die für die Midterm angemeldet waren, **nicht** notwendig.

Diejenigen Teilnehmer an der Midterm, die sich nicht über TUMonline angemeldet hatten, besorgen bitte **spätestens bis zum 11.2.** ihre Anmeldung persönlich im Infopoint.

Grundsätzlich bei **Nichtanmeldung**:  
Bitte im Hörsaal bei der **Aufsicht** melden!

## 1.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,  
außer

einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,  
aber

Anworten werden, falls notwendig,  
nur als [Hörsaalansage](#) gegeben.

## 1.4 Code

Auf dem Deckblatt der Klausurangabe finden Sie 8 Kästchen in die Sie einen Code mit **8 Ziffern** schreiben können

Mit diesem Code können Ihre Ergebnisse schnell und Datenschutzrechtlich **sicher** veröffentlicht werden.

**Bitte notieren Sie Ihren Code als Gedächtnisstütze!!!**

## 2. Vorbereitung auf TA's Blatt 14

### 2.1 VA 1

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade  $d(v_i)$ .

① Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

i) 2, 1, 0.

ii) 3, 3, 3, 3, 2, 2.

iii) 3, 3, 3, 2, 2, 2.

## Lösung:

- i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten den Grad 2 hat, dann ist er mit den beiden anderen Knoten verbunden und es kann keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben.

Außerdem muss die Summe der Grade gerade sein.

- ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}).$$

- iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

- 2 Beweisen oder widerlegen Sie:
- i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
  - ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

## Lösung:

Isomorphie bedeutet „Gleichheit bis auf Umbezeichnung“.

- i) Für isomorphe Graphen  $G_1, G_2$  gibt es eine bijektive Zuordnung der Knoten beider Graphen und zwar so, dass die Kantenbeziehungen und damit die Knotengrade erhalten bleiben (Umbezeichnung von Knoten).  
Somit sind auch die Gradfolgen identisch.

ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt **nicht!**

*Bemerkung:* Wenn diese Umkehrung gelten würde, dann hätte man in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren, die Isomorphie von Graphen zu testen. Dieses Problem ist jedoch, wie man zeigen kann, nicht effizient lösbar.

Wir beweisen unsere Aussage durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, indem wir nämlich zwei nicht isomorphe Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit gleicher Gradfolge 3, 2, 2, 1, 1, 1 angeben.

Seien

$$G_1 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}\}),$$

$$G_2 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}).$$

1.  $G_1$  und  $G_2$  besitzen beide die Gradfolge  $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$ .
2.  $G_1$  und  $G_2$  sind nicht isomorph:

**Beweis:**

In  $G_1$  hängt an dem einzigen Knoten vom Grad 3 ein einziges Blatt.

In  $G_2$  hängen an dem entsprechenden Knoten 2 Blätter.

## 2.2 VA 2

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{3,3}$ .

- 1 Geben Sie 2 **Unterteilungen** des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- 2 Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Ein **vollständiger bipartiter Graph**  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist eine bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a, b\}; a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „**dem**“ Graphen  $K_{m,n}$ .

- ① Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.

### Lösung:

Unterteilt man einen Graphen  $G = (V, E)$ , dann **ersetzt** man eine oder mehrere Kanten  $e \in E$  durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind **neu**, d. h., nicht schon in  $G$  enthalten.

Die ersetzte Kante **verschwindet**.

Den dabei entstehenden Graphen  $G' = (V', E')$  nennt man **Unterteilung von  $G$** . Es gilt dann  $e \notin E'$ .

Jede Unterteilung  $G''$  von  $G'$  ist auch eine Unterteilung von  $G$ , wobei  $G$  **kein Teilgraph** ist von  $G'$  oder  $G''$ .

Sei  $e = \{a, b\}$  eine Kante von  $(V, E) = K_{3,3}$ .

Wir entfernen  $e$  aus  $E$  und fügen einen neuen Knoten  $x \notin V$  zu  $V$  und 2 Kanten  $\{a, x\}, \{b, x\}$  zu  $E$ .

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine **Unterteilung von  $G$  mit 7 Knoten**.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus  $(V, E) = K_{3,3}$  eine Unterteilung mit **8 Knoten** zu erhalten.

(i) Man ersetzt eine Kante  $e \in E$  durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).

(ii) Man ersetzt zwei Kanten  $e, f \in E$  durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).

- ② Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Lösung:

Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine Kante, dann kann der **resultierende Graph  $R$**  natürlich keine Unterteilung des  $K_{3,3}$  mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des  $K_5$  kann nicht mehr in  $R$  enthalten sein, weil der  $K_5$  ja **10 Kanten** enthält und jede Unterteilung von  $K_5$  mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

$R$  ist also nach dem **Satz von Kuratowski** planar.

## 2.3 VA 3

- 1 Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
- 2 Zeigen Sie, dass jeder Baum  $T = (V, E)$ , für den  $|V| > 2$  und für alle  $v \in V$   $\deg(v) \neq 2$  gilt, einen Knoten  $v_0$  enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet  $\deg(v)$  den Grad von  $v$ .  
*Hinweis:* Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
- 3 Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
- 4 Jeder  $k$ -reguläre Graph mit  $k \geq 2$  enthält einen Kreis. Beweis!
- 5 Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

- ① Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch?  
Begründung!

Lösung:

Falsch!

Ein (einfacher) Graph  $G = (V, E)$  mit  $|V| = 1$  ist ein Baum (kreisfrei und zusammenhängend) mit Knoten  $x \in V$  vom Grad 0.

$x$  ist aber kein Blatt,  
weil dann  $\deg(x) = 1$  gelten müsste.

Ein noch einfacheres Gegenbeispiel ist der leere Baum.

*Bemerkung:* Ebenso wichtig ist aber die Beobachtung, dass abgesehen von obigen Beispielen **alle Bäume Blätter besitzen**. Es ist sogar so, dass jeder Knoten auf einem Pfad liegt mit Blättern als Endpunkte.

- ② Zeigen Sie, dass jeder Baum  $T = (V, E)$ , für den  $|V| > 2$  und für alle  $v \in V$   $\deg(v) \neq 2$  gilt, einen Knoten  $v_0$  enthält, der **zu mindestens 2 Blättern benachbart** ist. Dabei bezeichnet  $\deg(v)$  den Grad von  $v$ .

*Hinweis:* Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.

**Beobachtung:** Bäume, die nur aus Blättern bestehen, also keine innere Knoten enthalten, besitzen genau 2 Knoten und brauchen wegen  $|V| > 2$  nicht betrachtet zu werden.

## Lösung:

Es gilt, dass alle Knoten  $v$  von  $T$  einen Grad ungleich 0 besitzen.

Daraus folgt, dass  $T$  einen inneren Knoten  $v_i$  (d. h. einen Knoten  $v_i$ , der kein Blatt ist) besitzt, der mindestens den Grad 3 hat.

Durch Entfernen der Blätter von  $T$  konstruieren wir nun den Baum  $T'$ .

$T'$  ist nicht leer, weil  $v_i \in T'$  gilt.

Falls  $T'$  nur einen einzigen Knoten besitzt, dann muss dieser Knoten in  $T$  mindestens den Grad 3 haben, also mindestens 3 Blätter tragen, womit in diesem Fall der Beweis erbracht ist.

Anderfalls aber gibt es in  $T'$  mindestens ein Blatt.

Wählen wir nun in  $T'$  ein beliebiges Blatt  $v_0$  aus, dann ist  $v_0$  in  $T$  ein innerer Knoten mit Grad ungleich 0 oder 1 und hat wegen  $\deg(v) \neq 2$  den Grad  $\deg(v_0) \geq 3$ .

Da  $v_0$  in  $T'$  ein Blatt ist (also in  $T'$  den Grad 1 hat), muss es zwei Blätter  $u_1, u_2$  in  $T$  geben, die zu  $v_0$  benachbart sind.

### 3 Jeder Baum ist bipartit. Beweis!

#### Bemerkung:

Für **bipartite Graphen**  $G = (V, E)$  haben wir in der Vorlesung eine Zerlegung eingeführt. Danach schreiben wir

$G = (A, B, E)$ , wobei  $A \cup B = V$  und  $A \cap B = \emptyset$  gilt

und weder innerhalb  $A$  noch innerhalb  $B$  Kanten aus  $E$  verlaufen können.

Alle Kanten verbinden stets Elemente aus  $A$  mit Elementen aus  $B$ .

## Lösung:

Wir bauen, ausgehend von einem Baum  $G = (V, E)$ , induktiv zwei derartige Knotenmengen  $A$  und  $B$  auf, so dass alle Kanten nicht innerhalb von  $A$  und nicht innerhalb von  $B$  verlaufen.

## Start:

Wir wählen einen beliebigen Startknoten  $s$  und setzen  $\{s\} = A$ , sowie  $B = \emptyset$ .

Alle Nachfolger von  $s$  werden in die Menge  $B$  aufgenommen.

Der damit konstruierbare induzierte Teilgraph ist offenbar bipartit, weil im Baum die Nachbarn von  $s$  wegen Kreisfreiheit nicht mit Kanten verbunden sein können.

## Wiederholungsschritt:

Falls es einen Knoten  $x \in B$  gibt, der einen Nachbarn hat,  
der noch nicht in  $A \cup B$  enthalten ist,

wird  $x$  ausgewählt

und sämtliche Nachbarn von  $x$  werden in  $A$  aufgenommen.

Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist wiederum bipartit.

Der Wiederholungsschritt wird mit jeweils vertauschten Rollen von  $A$  und  $B$  wiederholt bis alle Knoten entweder in  $A$  oder in  $B$  enthalten sind.

④ Jeder  $k$ -reguläre Graph mit  $k \geq 2$  enthält einen **Kreis**. Beweis!

Lösung:

Widerspruchsbeweis:

Ein **kreisfreier** Graph ist ein Wald,

d. h. ein Baum oder

eine disjunkte und nicht zusammenhängende Summe von Bäumen.

Jeder nichtleere Baum enthält einen Knoten vom Grad 0 oder 1.

Der Graph kann also nicht  $k$ -regulär sein für  $k \geq 2$ ,  
denn das würde  $k = 0$  und  $k = 1$  ausschließen.

- ⑤ Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

### Lösung:

Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es nach Vorlesung einen zugehörigen Spannbaum.

Wir behaupten,

dass nach Entfernung eines Blattes  $w$  eines solchen Baums (einschließlich seiner in  $G$  inzidenten Kanten) der resultierende Teilgraph zusammenhängend ist.

Wir entfernen ein Blatt  $w$  eines Spannbaums mit all seinen inzidenten Kanten aus dem Graphen.

Da  $w$  ein Blatt eines Spannbaums des (zusammenhängenden) Graphen ist, bedeutet dies, dass nur eine einzige Kante des Spannbaums entfernt wird.

Alle übrigen mit  $w$  inzidenten Kanten können nicht ebenfalls Kanten des gleichen Spannbaums sein.

In dem restlichen Spannbaum bleiben also alle Knoten bis auf  $w$  erreichbar.

## 2.4 VA 4

- ① Gegeben seien die Bäume

$$B_1 =$$

$$([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\}),$$

$$B_2 =$$

$$([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\}).$$

Bestimmen Sie zu  $B_1$  und  $B_2$  jeweils den Prüfer-Code.

## Lösung:

Den Prüfer-Code von Bäumen  $B_1, B_2$  erhält man, indem man, ausgehend von einer lückenlosen und eindeutigen Knotennummerierung von 1 ab,

stets das Blatt mit der kleinsten Knotennummer bestimmt und denjenigen Knoten notiert, an dem das Blatt hängt.

Anschließend wird das Blatt aus dem Baum gestrichen und der Schritt so lange wiederholt bis nur noch 2 Knoten übrig sind.

Für  $B_1$  erhalten wir den Prüfer-Code  $(9, 9, 7, 6, 7, 9, 3)$ .

Für  $B_2$  erhalten wir den Prüfer-Code  $(1, 3, 4, 4, 1, 7, 3)$ .

2 Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

i)  $(6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$ ,

ii)  $(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$ ,

iii)  $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ .

## Lösung:

Die Anzahl der Knoten des dargestellten Baumes ist um 2 größer als die Länge  $l$  des Codes. Die Knotennummern sind also  $[l + 2]$ .

Diejenigen Knotennummern, die im Code nicht vorkommen, bilden die Blätter des Baumes.

Zur Rekonstruktion des Baumes nimmt man dasjenige Blatt mit der kleinsten Nummer und verbindet es mit dem Knoten, dessen Knotennummer im Code als Erste steht.

Man streicht dann die verarbeitete Blattnummer aus der Liste der noch nicht verarbeiteten Knoten.

Nun wiederholt man den Schritt mit dem noch nicht verarbeiteten Abschnitt des Codes (erstes Element wird gestrichen), so lange bis alle Codeziffern verarbeitet sind.

Die beiden Knoten in der verbliebenen Liste der noch nicht verarbeiteten Knoten verbindet man.

## 2.5 VA 5

Beweisen oder widerlegen Sie:

- 1 In jedem nichtleeren planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
- 2 Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

Wir beweisen:

- 1 In jedem nichtleeren planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten  $x$  mit  $\deg(x) \leq 5$  existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass **alle Knoten** aus  $V$  **mindestens den Grad 6** besitzen, d. h.  $\deg(x) \geq 6$  gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Sei also  $\deg(x) \geq 6$  für alle  $x \in V$ .

Es folgt zunächst  $|V| \geq 3$ .

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in  $G$  ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq |V| \cdot 6, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V|.$$

Andererseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

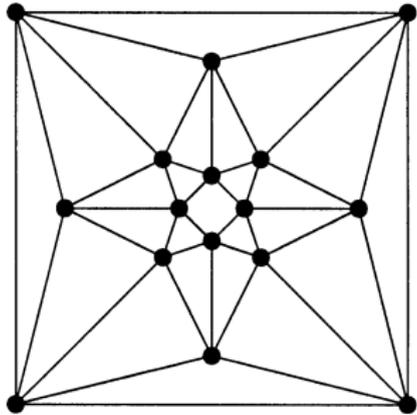
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|.$$

Widerspruch!

Wir beweisen:

- ② Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

Lösung:



Viel Erfolg bei der Endterm!