

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
.....	<input type="checkbox"/> Diplom <input type="checkbox"/> Inform. <input type="checkbox"/> Bachelor <input type="checkbox"/> BioInf. <input type="checkbox"/> Lehramt <input type="checkbox"/> WirtInf.
Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
.....

Code:

--	--	--	--	--	--	--	--

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von bis / von bis

Vorzeitig abgegeben um

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Korrektor
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\langle \mathbb{Z}_9, +_9, \cdot_9 \rangle$ ist isomorph zum Körper $GF(9)$.
 2. Sei $F(z) = \frac{z}{(1+2z)(1-3z)}$ die erzeugende Funktion der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$.
Dann erfüllt f für alle $n \geq 0$ die Rekursionsgleichung $f_{n+2} - f_{n+1} - 6f_n = 0$.
 3. Für die Stirlingzahlen erster Art $s_{n,k}$ bzw. zweiter Art $S_{n,k}$ gilt die Relation $S_{n,k} \leq s_{n,k}$.
 4. Es gibt keinen 2-regulären einfachen Graph G , der einen 2-regulären Teilgraph $T \neq G$ besitzt.
 5. Es gibt einen Graph mit Gradfolge $(3, 3, 3, 2, 2, 1)$.
-

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Seien $\mathbb{Z}_2[x]$ der Ring der Polynome in x über dem Körper \mathbb{Z}_2 und R der Restklassenring von $\mathbb{Z}_2[x]$ modulo $p(x) = x^4 + 1$. Wir stellen R als Ring der Reste bei Division durch $p(x)$ und Operationen modulo $p(x)$ dar, d. h. $R = \langle \mathbb{Z}_2[x]_4, +_p, \cdot_p \rangle$.

1. Wie viele Elemente enthält R ? Zeigen Sie, dass R kein Körper ist!
2. Berechnen Sie alle 4 Elemente, die den folgenden Ausschnitt der Verknüpfungstafel für die Multiplikation in R bilden.

\cdot_p	x^2	$x^2 + 1$	$x^2 + x$	$x^2 + x + 1$
x^3	?	?	?	?

Die Elemente „?“ müssen in der entsprechenden Darstellung als Polynom höchstens vom Grad 3 angegeben werden!

3. Wir suchen ein zu x inverses Element. Bestimmen Sie ein Polynom $q(x) \in R$, so dass $x \cdot_p q(x) = 1$ gilt.
-

Aufgabe 3 (5 Punkte)

10 Gewinne werden auf 3 Spieler verteilt. Ein Spieler kann stets auch mehrere Gewinne erhalten. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es,

1. wenn die Gewinne unterscheidbar sind und es nicht egal ist, wer welche Gewinne bekommt. Es sollen alle Gewinne verteilt werden.
2. wenn die Gewinne nicht unterscheidbar sind und es egal ist, wer wie viele Gewinne bekommt. Es können alle Gewinne oder auch eine beliebige Teil-Multimenge der Gewinne verteilt werden.
3. wenn die Gewinne nicht unterscheidbar sind und es nicht egal ist, wer wie viele Gewinne bekommt. Es sollen alle Gewinne verteilt werden.

Zur Darstellung der Ergebnisse dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Man zeige:

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{(x - m)^{n-m}}.$$

2. Sei $\omega = i$ und damit eine primitive 4-te Einheitswurzel. Stellen Sie $z^{\bar{3}} \in \mathbb{C}[z]$ in der Form $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$ dar und berechnen Sie die diskrete Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{4,\omega}(\vec{a})$ des Koeffizientenvektors $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

Vereinfachen Sie die Ergebnisdarstellung nach Möglichkeit.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung von \mathbb{N}_0 in die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen (oder anders ausgedrückt eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ von ganzen Zahlen), die für alle $n \geq 0$ die Rekursionsgleichung

$$f(n+2) + 2f(n+1) - 48f(n) = 14 \quad (1)$$

und die Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$ erfüllt.

(Funktionsschreibweise $f(n)$ und Indexschreibweise f_n sind gleichbedeutend.)

1. Sei $g = \Delta f$. Zeigen Sie, dass $g(0) = 0$ und $g(1) = 14$ gilt und für alle $n \geq 0$ die folgende homogene Rekursionsgleichung erfüllt ist:

$$g(n+2) + 2g(n+1) - 48g(n) = 0. \quad (2)$$

2. Bestimmen Sie eine geschlossene Form für g , indem Sie zunächst die allgemeine Lösung der Gleichung (2) angeben und dann die Parameter dieser Lösung so bestimmen, dass die Anfangsbedingungen $g(0) = 0$ und $g(1) = 14$ gelten.
 3. Wie kann man $f(n)$ für ein beliebiges $n \geq 1$ mit Hilfe von g und dem Wert $f(0)$ ohne Benutzung der Gleichung (1) berechnen?
-

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir Graphen $G = (V, E)$, die stets nichtleer, einfach und zusammenhängend sind.

1. Geben Sie die Knoten und Kanten des Graphen mit Prüfer-Code $(1, 2, 3, 4, 2, 3)$ an. Unterstützen Sie Ihre Darstellungen durch geeignete Zeichnungen.
 2. Geben Sie ein Beispiel eines bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2, E_{1,2})$ mit $V = V_1 \uplus V_2$ an, der die Gradfolge $(3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1)$ besitzt.
 3. Für $G = (V, E)$ gelte $|V| = |E|$.
Zeigen Sie, dass G planar ist.
-