
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 18. Januar 2011, 10 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie $(1 + 1)^{100}$ in $GF(9)$. Beweisen Sie Ihr Ergebnis!
2. Sei p ein primitives Element in $GF(9)$. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$\pi(x) = x^2 + px + p(p - 1)$$

über $GF(9)$ irreduzibel ist.

Hinweis: Da p primitiv ist, kann man aus p nicht die Wurzel ziehen, d. h., es gibt kein $\alpha \in GF(9)$, so dass $\alpha^2 = p$ gilt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die Symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen einer Teilmenge $[n]$ der natürlichen Zahlen mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenverknüpfung.

1. Falls S_n zyklisch ist, dann gilt $n \leq 2$. Beweis!
2. Bestimmen Sie die größte Zahl k mit der Eigenschaft, dass es ein Element $p \in S_7$ gibt mit der Ordnung k , d. h. $\text{ord}(p) = k$.

Begründen Sie Ihre Herleitung und geben Sie eine entsprechende Permutation p an.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Bestimmen Sie den Koeffizienten von tx^2y^4z in der ausmultiplizierten Summenentwicklung von $(x + y + z + t)^8$ Zahl in Dezimaldarstellung.

Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

2. Sei p eine Primzahl und $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq p - 1$.

Man zeige, dass p Teiler von $\binom{p}{i}$ ist.

Gilt diese Aussage auch dann, wenn $p \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist? Beispiel!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Binomische Formel gilt auch, wenn man statt Potenzen fallende oder steigende Faktorielle verwendet. Beweisen Sie die folgende Gleichung durch Induktion.

$$(x + y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

In der Vorlesung wurde mit der folgenden Tabelle die Basis für eine Klassifizierung kombinatorischer Aufgabenstellungen und Lösungen geschaffen. Die Formeln der Tabelle gelten für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben für Mengen oder Multimengen X jeweils $X\{\neq\}$ bzw. $X\{=\}$, falls X aus unterscheidbaren (ungleichen) bzw. nicht unterscheidbaren (gleichen) Elementen besteht.

$N \longrightarrow R$ $ N = n, R = r$	1	2	3	4
	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($r = n$)
$A : \begin{array}{l} N\{\neq\} \\ \longrightarrow R\{\neq\} \end{array}$	r^n	r^n	$r!S_{n,r}$	$r! = n!$
$B : \begin{array}{l} N\{=\} \\ \longrightarrow R\{\neq\} \end{array}$	$\frac{r^n}{n!}$	$\frac{r^n}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C : \begin{array}{l} N\{\neq\} \\ \longrightarrow R\{=\} \end{array}$	$\sum_{i=0}^r S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D : \begin{array}{l} N\{=\} \\ \longrightarrow R\{=\} \end{array}$	$\sum_{i=0}^r P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

- Bestimmen Sie für die Vorbereitungsaufgaben 1 bis 3 von Übungsblatt 10, mit welchen Formeln der Tabelle diese Aufgaben gelöst werden können.

Begründen Sie die Zuordnung, indem Sie jeweils Multimengen N und R in Verbindung mit dem entsprechenden Abbildungstyp angeben.

- Sei $N = N_1 \uplus N_2$ eine Multimenge mit $|N| = n$, so dass die Elemente von N_1 bzw. N_2 nicht unterscheidbar sind und alle Paare $x_1 \in N_1$ und $x_2 \in N_2$ unterscheidbar sind. Sei R mit $|R| = r$ eine Menge mit unterscheidbaren Elementen und a die Anzahl der Möglichkeiten der injektiven Zuordnung $N \rightarrow R$. Man zeige die folgende Verallgemeinerung der Formeln A_2 und B_2 der Tabelle.

$$a = \binom{r}{n_1} \cdot \binom{r - n_1}{n_2}.$$

- Man klassifiziere die Tutoraufgaben 2 und 3.2 von Übungsblatt 10 entsprechend.

Vorbereitung 2

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechnern rayhalle1, rayhalle2 bis rayhalle m ein, um die neuen Übungsaufgaben zu lesen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird,

1. welcher Student auf welchem Rechner eingeloggt ist,
2. wie viele Studenten auf welchem Rechner eingeloggt sind,
3. welche Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,
4. wie viele Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,

und wie hängen die Antworten jeweils davon ab, ob auf jedem Rechner

- höchstens
- mindestens
- genau

ein Student eingeloggt ist.

Vorbereitung 3

Wie viele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe)

Vorbereitung 4

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Tutoraufgabe 1

4 Studenten erhalten 12 Tafeln Schokolade. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen?

Beantworten Sie diese Frage für die folgenden zwei Fälle und führen Sie dabei Ihre Antwort auf die Lösungen in der Tabelle der Vorbereitung 1 zurück.

1. Die 12 Tafeln sind nicht unterscheidbar und die Studenten sind unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wie viele bekommt).
2. Die 12 Tafeln sind unterscheidbar und die Studenten sind nicht unterscheidbar. Aber es soll jeder Student genau 3 Tafeln bekommen.

Tutoraufgabe 2

Beantworten Sie die folgenden Fragen und führen Sie dabei Ihre Antwort auf die Lösungen in der Tabelle der Vorbereitung 1 zurück.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in 5 nicht unterscheidbare Pakete 15 gleiche Äpfel zu verteilen, wenn in jedem Paket mindestens 1 Apfel enthalten sein soll?

Tutoraufgabe 3

Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Formel für die Stirling-Zahlen zweiter Art.

$$S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i,k}.$$

Tutoraufgabe 4

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Permutationen einer n -elementigen Menge mit k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$s_{0,0} = 1, \quad s_{n,n} = 1. \quad s_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad s_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0.$$

2. Beweisen Sie mit Hilfe kombinatorischer Argumente, dass die folgende Gleichung gilt:

$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-1).$$