

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sei G eine zyklische Gruppe.
Dann gilt für alle $x, y \in G$ die Gleichung $x^2yx^{-1} = y^2xy^{-1}$.
 2. Sei $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Dann ist $R \circ R$ transitiv.
 3. Es gibt einen Körper mit 100 Elementen.
 4. Wir betrachten das Polynom $p(z) = 1 + z$ aus $\mathbb{C}[z]$.
Für die Fouriertransformierte von p gilt $\mathcal{F}_{2, e^{\pi i}}((1, 1)) = (2, 1 - i)$.
 5. Sei E der Translationsoperator für Funktionen von \mathbb{Z} in \mathbb{C} , und es sei f eine diskrete Stammfunktion von $E(g)$. Dann gilt $\nabla(f) = g$.
 6. Alle einfachen Graphen mit Gradfolge $(3, 3, 3, 1, 1, 1)$ sind isomorph.
 7. In $GF(8)$ gilt $(1 + 1)^7 = 0$.
-

Aufgabe 2 (8 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für alle Mengen P , Q und R die folgende Mengengleichung gilt:

$$(P \cup Q) \cap (Q \cup R) \cap (R \cup P) = (P \cap Q) \cup (Q \cap R) \cup (R \cap P).$$

2. Gilt die Mengengleichung

$$(P \cup Q) \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (Q \cap R)$$

für alle Mengen P , Q und R ? Beweisen Sie Ihre Antwort!

3. Konstruieren Sie für den folgenden aussagenlogischen Ausdruck mit Aussagenvariablen p , q und r einen äquivalenten aussagenlogischen Ausdruck F in disjunktiver Normalform mit möglichst wenigen Klauseln:

$$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r).$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Wir betrachten Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Das Wachstumsverhalten $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ ist definiert durch den pränexen prädikatenlogischen Ausdruck

$$(\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]). \quad (1)$$

1. Geben Sie für das Wachstumsverhalten $f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$ einen pränexen prädikatenlogischen Ausdruck an.
2. Es gelte $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Man zeige:

$$(\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]). \quad (2)$$

3. Es gelte (2). Man zeige $f \in \mathcal{O}(g(n))$.
-

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ ist genau dann nicht surjektiv, wenn gilt $(\exists y \in M \forall x \in M) [f(x) \neq y]$. Sei S die Menge aller nicht surjektiven Abbildungen von M in M .

1. Wie viele Elemente enthält S ?
 2. Es bezeichne \circ die Komposition von Abbildungen. Man zeige, dass $A = \langle S, \circ \rangle$ eine Algebra bildet, d. h. dass gilt $f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S$.
 3. Beweisen Sie, dass A keine Gruppe ist.
-

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Seien $\mathbb{Z}_2[x]$ der Ring der Polynome in x über dem Körper \mathbb{Z}_2 und R der Restklassenring von $\mathbb{Z}_2[x]$ modulo p mit $p = x^{15} + x^{14}$. Wir stellen R als Ring der Reste bei Division durch p und Operationen modulo p dar, d. h. $R = \langle \mathbb{Z}_2[x]_{15}, +_p, \cdot_p \rangle$, und bezeichnen den Rest $r \in R$ bei Division eines Polynoms $q \in \mathbb{Z}_2[x]$ durch p mit $r = q \bmod p$.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung für entsprechende Polynome aus $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$x^{14+n} \bmod p = x^{14} \bmod p. \quad (1)$$

2. Berechnen Sie $q = (x^9 +_p 1) \cdot_p (x^8 +_p 1) \cdot_p x^5 \in R$ als Polynom mit $\text{grad}(q) \leq 14$.
Ist q ein Nullteiler in R ? Beweisen Sie Ihre Antwort!
-

Aufgabe 6 (7 Punkte)

1. Wie viele Wörter der Länge 9 gibt es, die genau je 3 Buchstaben a und b und c enthalten?
2. Seien N und R endliche Mengen mit $|N| = 10$ und $|R| = 11$. Wie viele Abbildungen $f : N \rightarrow R$ gibt es, so dass für das Bild $f(N) = \{f(n) ; n \in N\}$ gilt $|f(N)| = 9$?
3. Wir betrachten 10 nicht unterscheidbare Bälle und 11 unterscheidbare Boxen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mindestens 9 Bälle auf die Boxen so zu verteilen, dass die Anzahl der leeren Boxen gleich 2 ist?

Zur Darstellung der Ergebnisse dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Wir nennen einen Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E 3-regulär, wenn V nicht leer ist und jeder Knoten mit genau drei Kanten inzidiert.

1. Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph eine gerade Anzahl von Knoten besitzt.
 2. Geben Sie einen 3-regulären Graph mit 4 Knoten an und zeigen Sie, dass es für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ einen planaren 3-regulären Graph mit n Knoten gibt.
 3. Sei $G' = (V, E')$ durch den Prüfercode $(2, 1, 4, 1, 3, 6)$ gegeben. Erweitern Sie die Kantenmenge E' zu einer Kantenmenge E in der Weise, dass $G = (V, E)$ ein bipartiter 3-regulärer planarer Graph ist.
 4. Zeigen Sie, dass es für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ einen bipartiten 3-regulären Graph mit n Knoten gibt.
-

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Wir betrachten die (nicht ganz allgemeine) homogene lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$f_{n+2} - (p+q) \cdot f_{n+1} + p \cdot q \cdot f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

mit Parametern $p, q \in \mathbb{R}$ für Folgen bzw. Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$.

1. Man zeige durch Widerspruchsbeweis: Falls es eine Lösung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ von (1) der Form $f_n = n \cdot \alpha^n$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, dann gilt $p = q$.

Hinweis: Betrachten Sie das Wachstumsverhalten der allgemeinen Lösungsfunktionen von (1), wie sie in der Vorlesung dargestellt wurden.

2. Sei $p = q$. Berechnen Sie p , c und α , so dass $f_n = c \cdot n \cdot \alpha^n$ eine Lösung von (1) ist, die die Nebenbedingungen $f_1 = -6$ und $f_2 = 36$ erfüllt.

3. Sei f eine Lösung von (1) mit $p = q = -2$, $f_0 = 1$ und $f_1 = -8$.

Geben Sie die Erzeugendenfunktion $F(z)$ der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ als rationale Funktion $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ an mit Polynomen $A(z)$ und $B(z)$.
