# 7. Matchings

## Definition 314

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls alle Kanten in $M$ paarweise disjunkt sind.
2. $M$ heißt maximales Matching, falls es kein Matching $M'$ in $G$ gibt mit $M \subsetneq M'$.
3. $M$ heißt Matching maximaler Kardinalität (aka Maximum Matching), falls es in $G$ kein Matching $M'$ mit $|M'| > |M|$ gibt.
4. $\mathrm{m}(G)$ ist die Kardinalität eines Maximum Matchings in $G$.

## Beispiel 315

maximales Matching
(aber nicht Maximum)

Maximum-Matching
(natürlich auch maximal)

## 7.1 Matchings in bipartiten Graphen

### Satz 316 („Heiratssatz“)

*Sei* $G = (U, V, E)$ *ein bipartiter Graph. Dann ist* $\mathrm{m}(G) = |U|$ *genau dann, wenn gilt:*

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$

### Beweis:

„$\Rightarrow$“

Offensichtlich.

„$\Leftarrow$"

Sei $M$ ein Maximum Matching in $G$.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in $M$ *ungematcht*.

Wir beginnen in $u_0$ eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von $U$ aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von $V$ aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

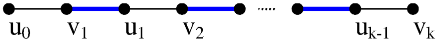
Fall 1: Die BFS findet in $V$ einen ungematchten Knoten $v$. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien $U'$ (bzw. $V'$) die Knoten des aktuellen BFS-Baums in $U$ (bzw. $V$). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da $G$ endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

# Beweis (Forts.):

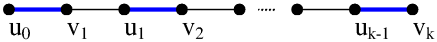
„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:




Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.

Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching $M'$ mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



## Definition 317

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U} \{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

## Satz 318

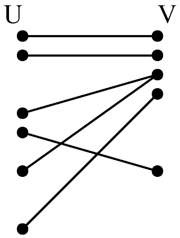
*Es gilt:*

$$\mathrm{m}(G) = |U| - \delta\ .$$

## Beweis:

Dass $\mathrm{m}(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $\mathrm{m}(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte folgenden Graphen:




Man fügt nun $\delta$ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in $U$, so dass ein $K_{|U|,\delta}$ entsteht.

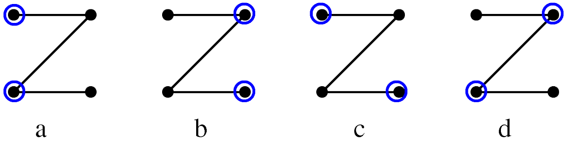
Beweis (Forts.):

Der neue Graph erfüllt die Voraussetzungen des Heiratssatzes. Damit gibt es im neuen Graphen ein Matching $M'$ mit $|M'| = |U|$. Daraus folgt, dass es im alten Graphen ein Matching der Kardinalität $\geq |U| - \delta$ geben muss. $\square$

## Definition 319

$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von $G$, wenn jede Kante in $G$ zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

## Beispiel 320




In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

## Satz 321

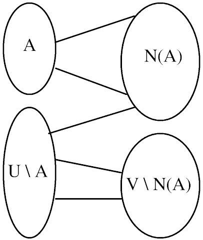
*Es gilt:*

$$\max\{|M|; M \text{ \textit{Matching}}\} = \min\{|D|; D \text{ \textit{Träger}}\}$$

## Beweis:

„$\leq$“ Offensichtlich.

„$\geq$“ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{m}(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:




$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von $G$.

$\square$

Sei

$$M = \left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

eine (quadratische) Matrix mit $m_{ij} \geq 0$. Alle Zeilen- und Spaltensummen von $M$ seien gleich $r > 0$.

Man ordnet nun $M$ den bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ zu mit

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ und } \{u_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m_{ij} > 0.$$

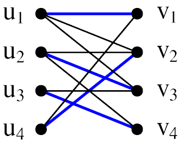
Ein Matching in $G$ entspricht einer Menge von Positionen in $M$, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen.

## Beispiel 322

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen



**Bemerkung:**

Ein Träger $D$ von $G$ ist also eine Menge von Zeilen und Spalten von $M$, die zusammen alle Einträge $m_{ij} > 0$ enthalten.

## Definition 323

Eine Menge von Positionen (in $M$), die alle in verschiedenen Zeilen und in verschiedenen Spalten liegen, heißt Diagonale von $M$.

Eine Diagonale der Größe $n$ muss in $M$ existieren, denn falls $M$ keine solche Diagonale hat, gibt es nach Satz 321 $e$ Zeilen und $f$ Spalten mit $e + f < n$, die zusammen alle Einträge $> 0$ von $M$ enthalten.

Die Gesamtsumme der Einträge in $M$ wäre dann

$$n \cdot r = \sum_{i,j} m_{ij} \leq (e + f) \cdot r < r \cdot n,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Sei $c_1$ der minimale Eintrag $> 0$ in $M$, und sei $P_1$ die zu einer Diagonale der Größe $n$ gehörige Permutationsmatrix (d. h. Einträge $= 1$ an den Positionen der Diagonale, 0 sonst).

Dann gilt:

$$M_1 := M - c_1 P_1$$

ist eine $n \times n$-Matrix mit allen Zeilen- und Spaltensummen $= r - c_1$. Die Matrix $M_1$ enthält damit mehr Nullen als $M$.

Damit haben wir gezeigt: